



(Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Revue :** CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Volume :** 4

**Année :** 2013

**Éditeur :** Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

**URI :** Repéré à : <http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html>

*Page vide laissée intentionnellement*



# CaMUS

## Volume 4 Cahiers mathématiques de l'Université de Sherbrooke

V. Bazier-Matte	1
Frises, polynômes continuants non signés et algorithme d'Euclide	
T. Sánchez McMillan	16
Fractions continues et arbre de Stern-Brocot	
D. Racicot-Desloges	27
Frises alternées	
M. Chabot	48
Concepts de dépendance et copules	
G. Lapointe	72
Les vagues solitaires	
Y. Lebrun	92
Espace-temps de Minkowski et univers d'Einstein	
S. Fortier	112
Les modèles MA, AR et ARMA multidimensionnels : estimation et causalité	
G. Douville	137
Application du pentagramme et coefficients amassés	

# Frises, polynômes continuants non signés et algorithme d’Euclide

Véronique Bazier-Matte

**RÉSUMÉ** Il est possible d’appliquer l’algorithme d’Euclide en se servant de frises semblables à celles étudiées par Conway et Coxeter. Pour ce faire, la première section de cet article définit et présente des propriétés de ces frises. Par la suite, une section est consacrée aux polynômes continuants non signés, puisqu’ils servent à établir un lien entre les frises et l’algorithme d’Euclide. Cet algorithme est donc présenté dans la section suivante, de même que la manière de l’appliquer avec des frises. Finalement, il est expliqué que trouver deux entiers  $s$  et  $t$  tels que  $sa + tb = 1$ , où  $a$  et  $b$  sont deux entiers copremiers, nécessite de conserver moins de nombres en mémoire dans l’algorithme en se servant des frises, plutôt que de l’algorithme traditionnel d’Euclide.

## 1 Introduction

L’algorithme d’Euclide est un algorithme très puissant qui permet de calculer le plus grand dénominateur commun, noté  $(a,b)$  de deux entiers  $a$  et  $b$  et de trouver deux entiers  $s$  et  $t$  tels que  $sa + tb = (a,b)$ . Cet algorithme, élaboré environ 300 ans avant Jésus-Christ est encore utilisé aujourd’hui, entre autres, à des fins cryptographiques. Or, certains nombres utilisés au cours de l’algorithme d’Euclide peuvent s’exprimer comme l’évaluation d’un polynôme continuant non signé en fonction d’autres nombres issus de l’algorithme. Il existe aussi des liens entre les polynômes continuants non signés et les frises de nombres ressemblant à celles décrites par Conway et Coxeter [CC73]. Il est donc intéressant de se pencher sur les relations entre ces trois objets – les frises, les polynômes continuants et l’algorithme d’Euclide – et d’étudier comment les uns peuvent s’exprimer en fonction des autres. Cet article propose donc, premièrement, une étude des frises de nombres axée principalement sur la manière de les construire. Les frises étudiées dans cet article diffèrent de celles étudiées par Conway et Coxeter par la règle appliquée à chaque maille, mais conservent la même structure. Il s’agit en fait d’un cas particulier des frises étudiées dans [BMRDSM12]. Par la suite, les polynômes continuants non signés et leurs propriétés sont étudiés. Ceci mène à prouver que tout polynôme continuant peut être exprimé comme élément d’une

---

J’aimerais remercier le CRSNG pour le financement du stage. J’aimerais également remercier Ibrahim Assem pour son soutien et ses judicieux conseils. Finalement, un merci spécial à David Racicot-Desloges et à Tanna Sánchez McMillan pour leur aide.

frise où les polynômes continuants d'indice moins élevé se trouvent sur les rangées précédentes. Finalement, nous nous intéressons à l'algorithme d'Euclide en décrivant d'abord son fonctionnement pour ensuite expliciter les liens avec les polynômes continuants et donc, avec les frises. Pour conclure, nous élaborons une technique d'application de l'algorithme d'Euclide au moyen des frises.

## 2 Frises et règle anti-modulaire

Les définitions et les résultats énoncés dans cette section, de même que ceux dans la section suivante sont des cas particuliers de ceux que l'on retrouve dans [BMRDSM12].

**Définition 2.1.** Pour  $n \geq 1$ , notons  $B_n$  l'ensemble des paires  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  telles que  $-2 \leq j - i \leq n + 1$ . Convenons de disposer ces paires de nombres de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 (i-1, i-3) & & (i, i-2) & & (i+1, i-1) & & (i+2, i) & & \\
 & (i-1, i-2) & & (i, i-1) & & (i+1, i) & & (i+1, i+1) & \\
 (i-2, i-2) & & (i-1, i-1) & & (i, i) & & (i+1, i+1) & & \\
 \dots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \dots \\
 (i-3, i+n-4) & & (i-2, i+n-3) & & (i-1, i+n-2) & & (i, i+n-1) & & \\
 & (i-3, i+n-3) & & (i-2, i+n-2) & & (i-1, i+n-1) & & (i-1, i+n) & \\
 (i-4, i+n-3) & & (i-3, i+n-2) & & (i-2, i+n-1) & & (i-1, i+n) & & 
 \end{array}$$

Un *pavage de nombres* est une fonction  $f : B_n \rightarrow \mathbb{Q}$ .

*Remarque 2.2.* Les *rangées* d'un pavage sont définies de sorte que les éléments de la forme  $(i, i + k - 1)$  composent la  $k$ -ième rangée de ce pavage. Ainsi, un pavage de la forme ci-dessus comporte  $n + 4$  rangées, numérotées de  $-1$  à  $n + 2$ .

**Exemple 2.3.** Voici un pavage à cinq rangées :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{5} & & -1 & & \frac{1}{2} & & -5 \\
 & 3 & & 0 & & \frac{9}{4} & \\
 \dots & 2 & & \frac{2}{3} & & 4 & 2 \dots \\
 & -\frac{5}{6} & & 11 & & \frac{3}{4} & \\
 -2 & & -1 & & 0 & & \frac{1}{7}
 \end{array}$$

**Définition 2.4.** Chaque portion de pavage de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 & (i+1, j-1) & \\
 (i, j-1) & & (i+1, j) \\
 & (i, j) & 
 \end{array}$$

est appelée *maille de but*  $(i+1, j)$ .

**Définition 2.5.** Une *frise de nombres* est un pavage de nombres  $f : B_n \rightarrow \mathbb{Q}$ , où chaque maille de but  $(i+1, j)$  satisfait à la règle antimodulaire :

$$f(i, j-1)f(i+1, j) - f(i+1, j-1)f(i, j) = (-1)^{j-i},$$

de telle sorte que :

- i) la rangée  $-1$  est composée de  $0$ , c'est-à-dire que  $f(i, i-2) = 0$  pour tout  $i$ ;
- ii) la rangée  $0$  est composée de  $1$ , c'est-à-dire que  $f(i, i-1) = 1$  pour tout  $i$ ;
- iii) la rangée  $n+1$  est composée de  $1$  ou de  $-1$ , c'est-à-dire que  $f(i, i+n) = 1$  ou  $-1$  pour tout  $i$ ;
- iv) La rangée  $n+2$  est composée de  $0$ , c'est-à-dire que  $f(i, i+n+1) = 0$  pour tout  $i$ .

*Remarque 2.6.*

- a) En fixant ainsi les rangées  $-1$  et  $0$ , la règle antimodulaire est respectée sur les mailles de but  $(i+1, i)$  pour tout  $i$ . En effet,

$$\begin{aligned}
 f(i, i-1)f(i+1, i) - f(i+1, i-1)f(i, i) &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot f(i, i) \\
 &= 1 \\
 &= (-1)^{i-i} \text{ pour tout } i.
 \end{aligned}$$

- b) De même, afin que la règle antimodulaire soit respectée sur toutes les mailles de but  $(i+1, i+n+1)$ , nous fixerons la rangée  $n+1$  d'une frise à

$$\cdots \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \cdots$$

si  $n$  est pair. De cette manière, nous retrouvons en alternance des mailles des formes suivantes dans les frises où  $n$  est pair :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & f(i+1, i+n) & & & f(i+1, i+n) & & \\
 -1 & & 1 & \text{et} & 1 & & -1. \\
 & 0 & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned}
 f(i, i+n)f(i+1, i+n+1) - f(i+1, i+n)f(i, i+n+1) \\
 &= 1 \cdot -1 - f(i, i+n+1) \cdot 0 \\
 &= -1 \\
 &= (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Fixer la rangée  $n+1$  à  $\cdots \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \cdots$  quand  $n$  est pair permet non seulement de toujours respecter la règle antimodulaire sur les mailles de but  $(i+1, i+n+1)$ , mais aussi de construire des frises composées d'entiers. En effet, il aurait été suffisant de fixer la rangée  $n+1$  à :

$$\cdots \quad \frac{a}{b} \quad -\frac{b}{a} \quad \frac{a}{b} \quad -\frac{b}{a} \quad \cdots,$$

où  $a, b \in \mathbb{N}_*$ , car la fonction de frise aurait été respectée. Toutefois, ceci aurait empêché l'étude des frises d'entiers.

Par ailleurs, si  $n$  est impair, soit la rangée  $n + 1$  est composée entièrement de 1, soit elle est composée entièrement de  $-1$ . Pour chaque  $n$  impair, ces deux options sont possibles et permettent d'obtenir deux ensembles de frises différents. Nous retrouvons ainsi dans ces frises des mailles de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} & f(i+1, i+n) & & & f(i+1, i+n) & & \\ 1 & & 1 & \text{ou} & -1 & & -1. \\ & 0 & & & 0 & & \end{array}$$

Ainsi, la règle antimodulaire est toujours respectée pour les mailles de but  $f(i+1, i+n+1)$  :

$$\begin{aligned} & f(i, i+n)f(i+1, i+n+1) - f(i+1, i+n)f(i, i+n+1) \\ &= 1 - f(i, i+n+1) \cdot 0 \\ &= 1 \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Encore une fois, nous aurions pu fixer la rangée  $n + 1$  quand  $n$  est impair différemment, tout en respectant la règle antimodulaire. Toutefois, la fixer uniquement à 1 ou à  $-1$  est la seule manière d'obtenir des entiers sur la rangée  $n + 1$ , donc éventuellement sur la frise au complet. En effet, si nous l'avions fixé à

$$\dots \frac{a}{b} \quad \frac{b}{a} \quad \frac{a}{b} \quad \frac{b}{a} \quad \dots, \text{ où } a, b \in \mathbb{N}_*,$$

la règle antimodulaire aurait été respectée pour toute maille de but  $(i+1, i+n+1)$ , mais aucune frise ne serait composée que d'entiers.

**Définition 2.7.** L'*ordre* d'une frise, noté  $n$ , est le nombre de rangées non fixées qu'elle comporte. Autrement dit, il s'agit du nombre de rangées de la frise en excluant la rangée  $-1$ , la rangée 0, la rangée  $n + 1$  et la rangée  $n + 2$ , soit les rangées fixées.

**Exemple 2.8.** Voici une portion d'une frise d'ordre 2 :

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \dots & -2 & & 2 & & -1 & & 3 & & -1 & & 2 & \dots \\ & & -3 & & -1 & & -2 & & -2 & & -1 \\ & -1 & & 1 & & -1 & & 1 & & -1 & & 1 \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Dans l'exemple 2.8, nous avons une frise à 6 rangées d'ordre 2. Toutefois, ces quatre rangées supplémentaires sont très importantes. En effet, elles servent à déterminer, au moins en partie, une frise lorsqu'on en connaît une section (voir la définition ci-bas). De plus, les deux premières rangées permettent d'établir un lien avec les polynômes continnants non signés, comme ceci sera expliqué à la section 3.

**Définition 2.9.** Une *section* d'une frise est une portion de cette frise qui comporte un et un seul élément par rangée de telle sorte que si  $f(i,j)$  fait partie de la section avec  $-1 \leq j - i \leq n$ , alors

- soit  $f(i+1,j)$ , soit  $f(i,j-1)$  en fait partie et
- soit  $f(i-1,j)$ , soit  $f(i,j+1)$  en fait partie.

En d'autres termes, si un élément d'une frise,  $f(i,j)$ , fait partie d'une section, alors un élément de la rangée inférieure et un élément de la rangée supérieure formant une maille commune avec  $f(i,j)$  font également partie de la section.

**Exemple 2.10.** Voici une section de la frise donnée dans l'exemple 2.8 :

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

**Lemme 2.11.** Si une section d'éléments non nuls (mis à part les éléments sur les rangées  $-1$  et  $n+2$ ) d'une frise est fixée, alors il est possible de déterminer de manière unique les deux sections adjacentes et parallèles.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer successivement la règle antimodulaire à chacune des mailles des éléments de la section connue.  $\square$

**Exemple 2.12.** Soit une frise d'ordre  $n = 3$ , où la dernière rangée est composée de  $-1$ . Supposons que l'on connaisse la section de la frise suivante :

- $f(i+2,i) = 0$  ;
- $f(i+1,i) = 1$  ;
- $f(i,i) = -5$  ;
- $f(i-1,i) = 1$  ;
- $f(i-1,i+1) = 1$  ;
- $f(i-1,i+2) = -1$  ;
- $f(i-2,i+2) = 0$ .

Voici donc une portion d'une telle frise :

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & & 0 & & 0 \\ & 1 & & 1 & & 1 \\ & & & -5 & & \\ \dots & & 1 & & & \dots \\ & & & 1 & & \\ -1 & & -1 & & -1 & -1 \\ & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$



Déterminons les éléments des sections adjacentes. Nous cherchons dans la section de gauche  $f(i-1, i-1)$ ,  $f(i-2, i-1)$  et  $f(i-2, i)$  et dans la section de droite  $f(i+1, i+1)$ ,  $f(i, i+1)$  et  $f(i, i+2)$ . Il est à noter que nous n'avons pas besoin de calculer les éléments des rangées -1, 0, 4 et 5, car ils sont trivialement connus.

En vertu de la règle antimodulaire,  $f(i-1, i-1) \cdot -5 - 1 \cdot 1 = -1$ , d'où on déduit que  $f(i-1, i-1) = 0$ . De même,  $f(i-2, i) \cdot 1 - 1 \cdot = -1$  donc  $f(i-2, i) = -2$ . Finalement,  $f(i-2, i-1) \cdot -1 - f(i-1, i-1) \cdot f(i-2, i) = 1$ , ce qui revient à  $f(i-2, i-1) \cdot -1 - 0 \cdot -2 = 1$  et ainsi  $f(i-2, i-1) = 1$ .

De la même manière, en utilisant toujours la règle antimodulaire, il est possible de trouver les éléments de la seconde section :  $f(i+1, i+1) = 1$ ,  $f(i, i+1) = -4$  et  $f(i, i+2) = 3$ .

**Définition 2.13.** Une *section oblique* d'une frise est une section d'une frise dont tous les éléments sont de la forme  $f(i, \lambda)$  ou  $f(\lambda, i)$ , où  $\lambda$  est fixe et  $i$  varie.

**Exemple 2.14.** Voici des sections obliques de la frise donnée dans l'exemple 2.8 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & 1 \\ & & -1 & & & & 3 \\ & & & -2 & \text{et} & -2 & \\ & & & & 1 & & -1 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array}$$

Le lemme suivant stipule que, dans une frise, si les  $k+2$  premiers éléments d'une section oblique de la forme  $(\lambda, i)$ , où  $\lambda$  est fixe et  $i$  varie (ou de la forme  $(i, \lambda)$ ) d'une frise sont connus, alors, à partir de  $(\lambda, \lambda-2)$ ,  $(\lambda, \lambda-1), \dots, (\lambda, \lambda+k-1)$ , il est possible de déterminer  $(\lambda+1, \lambda-1)$ ,  $(\lambda+1, \lambda), \dots, (\lambda+1, \lambda+k-1)$ . De la même manière, à partir de  $(\lambda+2, \lambda)$ ,  $(\lambda+1, \lambda), \dots, (\lambda-k+1, \lambda)$ , il est possible de déterminer  $(\lambda+1, \lambda-1)$ ,  $(\lambda, \lambda-1), \dots, (\lambda-k+1, \lambda-1)$ .

**Lemme 2.15.** Soit  $\lambda$  fixe et  $i$  variant. Si les  $k+2$  premiers éléments d'une section oblique de la forme  $(\lambda, i)$  (ou de la forme  $(i, \lambda)$ ) d'une frise sont connus, les  $k+1$  premiers éléments de la section oblique de la forme  $(\lambda+1, i)$  (ou  $(i, \lambda-1)$ , respectivement) sont également connus.

*Démonstration.* Montrons l'énoncé par récurrence. Supposons que les  $k+2$  premiers termes de la section oblique de la forme  $(\lambda, i)$  soient connus. Par définition,  $f(\lambda+1, \lambda-1) = 0$  et  $f(\lambda+1, \lambda) = 1$ . Supposons que  $f(\lambda+1, \lambda+i)$  est connu pour un certain  $i$  tel que  $-1 \leq i < k-1$  et prouvons que  $f(\lambda+1, \lambda+i+1)$  s'en déduit. En vertu de la règle unimodulaire, on sait que

$$f(\lambda, \lambda+i)f(\lambda+1, \lambda+i+1) - f(\lambda+1, \lambda+i)f(\lambda, \lambda+i+1) = (-1)^{i+1},$$

d'où

$$f(\lambda+1, \lambda+i+1) = \frac{f(\lambda+1, \lambda+i)f(\lambda, \lambda+i+1) + (-1)^{i+1}}{f(\lambda, \lambda+i)}.$$

Par récurrence, on en déduit la valeur de  $f(\lambda + 1, i + 1)$  pour tout  $i$  tel que  $-1 \leq i < k$ .  $\square$

Pour établir un lien avec l'algorithme d'Euclide, qui utilise uniquement des nombres entiers, nous nous intéressons aux conditions d'obtention de frises d'entiers à partir d'une section oblique de cette frise.

**Proposition 2.16.** *Si les  $k + 2$  premiers termes  $f(i, i - 2)$ ,  $f(i, i - 1)$ ,  $\dots$ ,  $f(i, i + k - 1)$  d'une section oblique d'une frise sont entiers, non nuls et tels que*

$$f(i, i + m) | f(i, i + m + 1) - f(i, i + m - 1)$$

*pour tout  $m$  tel que  $-1 \leq m \leq k - 2$ , alors les  $k + 1$  premiers termes de la section adjacente  $f(i + 1, i - 1)$ ,  $f(i + 1, i)$ ,  $\dots$ ,  $f(i + 1, i + k - 1)$  sont aussi entiers.*

*De même, si les  $k + 2$  premiers termes  $f(j + 2, j)$ ,  $f(j + 1, j)$ ,  $\dots$ ,  $f(j - k + 1, j)$  d'une section oblique d'une frise sont entiers, non nuls et tels que  $f(j - m, j) | f(j - m - 1, j) - f(j - m + 1, j)$  pour tout  $m$  tel que  $-1 \leq m \leq k - 2$ , alors les  $k + 1$  premiers termes de la section adjacente  $f(j + 1, j - 1)$ ,  $f(j, j - 1)$ ,  $\dots$ ,  $f(j - k + 1, j - 1)$  sont aussi entiers.*

*Démonstration.* Montrons la première partie de cette proposition. Afin d'alléger la lecture, notons  $x_m = f(i, i + m - 1)$  et  $y_m = f(i + 1, i + m)$ . Par définition,  $y_{-1}$  et  $y_0 \in \mathbb{Z}$ . Supposons que  $y_{m-1}$  et  $y_m \in \mathbb{Z}$  pour un certain  $m$  tel que  $-1 \leq m < k - 1$  et montrons que  $y_{m+1} \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= -y_m \frac{y_{m-1} - y_{m+1}}{y_m} + y_{m-1} \\ &= \frac{-y_m}{x_{m+1}} \left( \frac{x_{m+1}y_{m-1} - x_{m+1}y_{m+1} + (-1)^m + (-1)^{m+1}}{y_m} \right) + y_{m-1} \\ &= \frac{-y_m}{x_{m+1}} \left( \frac{x_{m+1}y_{m-1} + (-1)^m}{y_m} - \frac{x_{m+1}y_{m+1} + (-1)^{m+1}}{y_m} \right) + y_{m-1} \\ &= \frac{-y_m(x_m - x_{m+2})}{x_{m+1}} + y_{m-1}. \end{aligned}$$

Puisque  $x_{m+1} | x_m - x_{m+2}$  et que  $y_m$  et  $y_{m-1} \in \mathbb{Z}$ ,  $y_{m+1} \in \mathbb{Z}$ . Par récurrence, on en déduit que  $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$  sont tous des entiers.

La deuxième partie de la proposition se démontre exactement de la même manière en posant plutôt  $x_m = f(j - m + 1, j)$  et  $y_m = f(j - m, j - 1)$ .  $\square$

### 3 Polynômes continuants non signés

Nous abordons maintenant les polynômes continuants non signés. Comme ils sont à la fois reliés aux frises et à l'algorithme d'Euclide, leur étude permettra d'établir ultérieurement un lien entre ces deux sujets.

**Définition 3.1.** Le  $k$ -ième polynôme continuant non signé est défini par récurrence à partir des deux précédents par :

$$p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}) = x_{i+k-1}p_{k-1}(x_i, \dots, x_{i+k-2}) + p_{k-2}(x_i, \dots, x_{i+k-3}),$$

où  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est une famille dénombrable d'indéterminées telle que  $x_i \in \mathbb{Q}$  avec les conditions initiales suivantes :

$$p_{-1} = 0 \text{ et } p_0 = 1.$$

**Exemple 3.2.** Par exemple, on évalue

$$\begin{aligned} p_3(2, -1, 3) &= 3p_2(2, -1) + p_1(2) \\ &= 3(-1p_1(2) + p_0) + p_1(2) \\ &= -2p_1(2) + 3p_0 \\ &= -2(2p_0 + p_{-1}) + 3p_0 \\ &= -p_0 - 2p_{-1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Afin d'établir un lien avec les frises, nous devons connaître quelques propriétés des polynômes continuants non signés, en particulier la suivante.

**Proposition 3.3.** Soit  $k \geq 0$ . Alors, on obtient que

$$p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1})p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k}) = (-1)^k.$$

*Démonstration.* Montrons l'énoncé par récurrence. Commençons avec  $k = 0$  :

$$p_0 \cdot p_0 - p_{-1} \cdot p_1(x_i) = (-1)^0.$$

Supposons que l'énoncé est vrai pour un  $k \geq 0$  et prouvons-le pour  $k + 1$  :

$$\begin{aligned} &p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k})p_{k+1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}) \\ &\quad - p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k})p_{k+2}(x_i, \dots, x_{i+k+1}) \\ &= p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k}) \\ &\quad \quad (x_{i+k+1}p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) + p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})) \\ &\quad - p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k})p_{k+2}(x_i, \dots, x_{i+k+1}) \\ &\quad \quad (x_{i+k+1}p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k}) + p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1})) \\ &= -p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1})p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) \\ &\quad + p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k}) \\ &= -(-1)^k \text{ par hypothèse} \\ &= (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit que l'énoncé est vrai pour tout  $k \geq 0$ . □

Remarquons qu'en posant  $p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}) = f(i, i+k-1)$  pour tout  $k \geq -1$ , la proposition 3.3 devient exactement la règle antimodulaire qui régit les frises. Ainsi, il est possible d'exprimer l'évaluation en des variables  $x_i$  de tout polynôme continuant non signés comme un élément d'une frise dont  $\{x_i\}$  forme la rangée 1. Réciproquement, un élément  $f(i, j)$  sur la  $j-i+1$ -ième rangée d'une frise s'écrit  $p_{j-i+1}(x_i, \dots, x_j)$ , où  $x_m = f(m, m)$ .

Toute frise d'ordre  $n$  peut donc s'écrire ainsi :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & p_{-1} & & p_{-1} & & p_{-1} & \\
 & x_i & & x_{i+1} & & x_{i+2} & \\
 \dots & & p_2(x_i x_{i+1}) & & p_2(x_{i+1} x_{i+2}) & & p_2(x_{i+2} x_{i+3}) \dots, \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
 & p_{n+2}(x_{i-1}, \dots, x_{i+n}) & & p_{n+2}(x_i, \dots, x_{i+n+1}) & & p_{n+2}(x_{i+1}, \dots, x_{i+n+2}) & 
 \end{array}$$

où  $p_{n+2}(x_i, \dots, x_{i+n+1}) = 0$  pour tout  $i$  et  $p_{n+1}(x_i, \dots, x_{i+n}) = 1$  ou  $-1$  pour tout  $i$ , selon la frise.

*Remarque 3.4.* La règle antimodulaire se déduit de la définition des polynômes continnants non signés, mais l'inverse n'est pas vrai. Ainsi, dans certains cas, la règle antimodulaire ne permet pas de déterminer de manière unique les éléments d'une frise, alors que les polynômes continnants non signés le permettent.

**Lemme 3.5.** *Il est possible d'évaluer un polynôme continuant non signé à partir des premières indéterminées plutôt que des dernières :*

$$p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}) = x_i p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) + p_{k-2}(x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}).$$

*Démonstration.* Cet énoncé se montre par récurrence. Pour  $k = 1$  et  $k = 2$  :

$$\begin{aligned}
 p_1(x_i) &= x_i p_0 + p_{-1} \\
 p_2(x_i, x_{i+1}) &= x_{i+1} p_1(x_i) + p_0 = x_i x_{i+1} + 1 = x_i p(x_{i+1}) + p_0
 \end{aligned}$$

Supposons que l'énoncé est vrai pour un certain  $k \geq 1$  et prouvons-le pour  $k+1$ .

$$\begin{aligned}
 p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k}) &= x_{i+k} p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}) + p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) \\
 &= x_{i+k} (x_i p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) + p_{k-2}(x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1})) \\
 &\quad + (x_i p_{k-2}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-2}) + p_{k-3}(x_{i+2}, \dots, x_{i+k-2})) \\
 &= x_i (x_{i+k} p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) + p_{k-2}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-2})) \\
 &\quad + (x_{i+k} p_{k-2}(x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}) + p_{k-3}(x_{i+2}, \dots, x_{i+k-2})) \\
 &= x_i p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) + p_{k-1}(x_{i+2}, \dots, x_{i+k})
 \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit que l'énoncé est vrai pour tout  $k \geq 1$ .  $\square$

## 4 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers  $a$  et  $b$ . L'algorithme permet également de déterminer  $s$  et  $t \in \mathbb{Z}$  tels que  $as + tb = (a, b)$ .

Il existe un lien entre l'algorithme d'Euclide (décrit à l'Algorithme 1) et les frises que nous explorerons plus tard.

**Exemple 4.1.** Trouvons le pgcd de 118 et 66 et trouvons  $s$  et  $t \in \mathbb{Z}$  tels que  $118s + 66t = (118, 66)$  :

$$118 = 1 \cdot 66 + 52$$

$$66 = 1 \cdot 52 + 14$$

$$52 = 3 \cdot 14 + 10$$

$$14 = 1 \cdot 10 + 4$$

$$10 = 2 \cdot 4 + 2$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0.$$

Ainsi, on trouve  $(118, 66) = 2$ . Trouvons maintenant  $s$  et  $t$  :

$$\begin{aligned} 2 &= 10 - 2 \cdot 4 \\ &= 10 - 2(14 - 1 \cdot 10) \\ &= 3 \cdot 10 - 2 \cdot 14 \\ &= 3(52 - 3 \cdot 14) - 2 \cdot 14 \\ &= 3 \cdot 52 - 11 \cdot 14 \\ &= 3 \cdot 52 - 11(66 - 1 \cdot 52) \\ &= 14 \cdot 52 - 11 \cdot 66 \\ &= 14(118 - 1 \cdot 66) - 11 \cdot 66 \\ &= 14 \cdot 118 - 25 \cdot 66, \end{aligned}$$

d'où  $s = 14$  et  $t = -25$ .

Remarquons ici que :

$$p_5(1, 1, 3, 1, 2) = 25 \text{ et } p_4(1, 3, 1, 2) = 14.$$

Or, 1, 1, 3, 1 et 2 sont les quotients à chaque étape de l'algorithme.

Le lemme suivant, exposé de manière informelle dans [Hag05], stipule que les coefficients de l'algorithme d'Euclide correspondent à des polynômes continuant non signés.

Pour simplifier la lecture, nous noterons  $a = r_{-1}$  et  $b = r_0$ .

Le lemme suivant explique que les entiers  $s$  et  $t$  tels que  $sa + tb = 1$  s'expriment comme l'évaluation de polynômes continuants en les quotients obtenus par l'algorithme d'Euclide.

**Lemme 4.2.** Soient  $a, b \in \mathbb{N}_*$ ,  $r_1, \dots, r_k$  les  $k$  restes obtenus par l'algorithme d'Euclide appliqué au calcul de quotient ( $r_k$  étant le dernier reste non nul) et  $q_1, \dots, q_k$  les  $k$  quotients obtenus par cet algorithme. Alors, on a que

$$(-1)^i p_i(q_{k-i+1}, \dots, q_k) r_{k-i} + (-1)^{i-1} p_{i-1}(q_{k-i+2}, \dots, q_k) r_{k-i-1} = (a, b)$$

pour tout  $i \leq k - 1$ .

**Données :**  $a = r_{-1}$  et  $b = r_0 \in \mathbb{N}_*$   
**Résultat :** pgcd de  $a$  et  $b$  et  $s, t \in \mathbb{Z}$  tel que  $sa + tb = (a, b)$   
 Posons  $i = 0$ .  
**Tant que**  $r_i \neq 0$  **faire**  
    $r_{i-1} = q_{i+1}r_i + r_{i+1}$  (En vertu du théorème de divisibilité, il existe  
    $q_{i+1}, r_{i+1} \in \mathbb{N}_*$  tels que  $r_{i-1} = r_i q_{i+1} + r_{i+1}$ , où  $0 \leq r_{i+1} < r_i$ ).  
   Posons  $i = i + 1$ .  
**Si**  $r_{i+1} = 0$  **alors**  
    $(a, b) = r_i$ .  
 Comme  $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$  et que  $r_i \in \mathbb{N}$  pour tout  $i$ , il existe un plus  
 petit  $k$  tel que  $r_{k+1} = 0$ . Posons  $k$  tel que  $r_k = (a, b)$ . On sait que  
 $(a, b) = r_{k-1} - q_{k+1}r_k$ .  
**Pour**  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k$   
   réécrire  $r_i$  avec  $r_{i-2} - q_i r_{i-1}$ .  
 Ainsi, ultimement, il est possible d'exprimer  $(a, b)$  en fonction de  $a$  et de  $b$ .

**Algorithme 1 :** Algorithme d'Euclide

*Démonstration.* Cet énoncé se prouve par récurrence. Commençons par le montrer pour  $i = 0$  :

$$(-1)^0 p_0 r_k + (-1)^{-1} p_{-1} r_{k-1} = r_k = (a, b) \text{ en vertu de la définition 1.}$$

Supposons que l'énoncé est vrai pour un certain  $i \geq 1$  et prouvons-le pour  $i + 1$  :

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{i+1} p_{i+1} (q_{k-i}, \dots, q_k) r_{k-i-1} + (-1)^i p_i (q_{k-i+1}, \dots, q_k) r_{k-i-2} \\
 &= (-1)^{i-1} (q_{k-i} (p_i (q_{k-i+1}, \dots, q_k)) + p_{i-1} (q_{k-i+2}, \dots, q_k)) r_{k-i-1} \\
 &\quad + (-1)^i p_i (q_{k-i+1}, \dots, q_k) (q_{k-i} r_{k-i-1} + r_{k-i}) \\
 &= (-1)^i p_i (q_{k-i+1}, \dots, q_k) r_{k-i} + (-1)^{i-1} p_{i-1} (q_{k-i+2}, \dots, q_k) r_{k-i-1} \\
 &\quad + \left( (-1)^{i-1} + (-1)^i \right) (q_{k-i} p_i (q_{k-i+1}, \dots, q_k) r_{k-i-1}) \\
 &= (a, b). \quad \square
 \end{aligned}$$

La prochaine proposition permet de déterminer une paire de valeurs possible pour  $s$  et  $t \in \mathbb{Z}$  tels que  $sa + tb = (a, b)$ . En fait, une infinité de paires nombres entiers  $(s, t)$  vérifient  $sa + tb = (a, b)$ ; la proposition suivante ne permet d'en déterminer qu'une seule. Une fois que l'on connaît  $(s, t)$  qui respectent ces conditions, il est possible d'en déterminer une infinité d'autres puisque, si  $sa + tb = (a, b)$ , alors  $(s + mb)a + (t - ma)b = (a, b)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 4.3.** Soient  $a, b \in \mathbb{N}_*$ ,  $r_1, \dots, r_k$  les  $k$  restes de l'algorithme d'Euclide appliqué au calcul du pgcd de  $a$  et de  $b$  ( $r_k$  étant le dernier reste non nul) et  $q_1, \dots, q_k$  les  $k$  quotients obtenus par cet algorithme. Alors, on trouve que

$$(-1)^{k-1} p_{k-1} (q_2, \dots, q_k) \cdot a + (-1)^k p_k (q_1, \dots, q_k) \cdot b = (a, b).$$

*Démonstration.* Cela découle du lemme 4.2 en posant  $i = k$ .  $\square$

La proposition 4.3 relie l'algorithme d'Euclide et les polynômes continuants non signés, et, ainsi, l'algorithme d'Euclide et les frises. En effet, selon cette proposition, en disposant  $q_1, \dots, q_k$  sur la première rangée d'une frise, nous obtenons la frise suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 q_1 & & q_2 & & \cdots & & q_k \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
 \cdots & & & & & & \cdots \\
 & & & & & s & \\
 & & & & t & & 
 \end{array}$$

**Exemple 4.4.** Reprenons l'exemple 4.1 en utilisant la proposition 4.3 pour déterminer les valeurs de  $s$  et de  $t$ .

Nous connaissons les valeurs de  $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1, q_4 = 1, q_5 = 2$ . Plaçons donc ces valeurs sur la première rangée de la frise et déterminons les éléments de la frise sur les rangées subséquentes :

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\
 & 2 & 4 & 4 & 3 \\
 & & 7 & 5 & 11 \\
 & & & 9 & 14 \\
 & & & & 25
 \end{array}$$

On en déduit que  $s = 14$  et  $t = -25$  (la variable négative entre  $s$  et  $t$  est celle qui se trouve sur une rangée impaire).

Calculer des valeurs de  $s$  et de  $t$  à l'aide des polynômes continuants non signés ou des frises s'effectue en autant, sinon plus, d'étapes qu'en utilisant l'algorithme traditionnel d'Euclide. Il n'y a donc pas d'avantages apparents à utiliser ces méthodes. Cependant, si  $(a, b) = 1$ ,  $s$  et  $t$  se déterminent plus rapidement à l'aide des frises, comme le montrent le théorème 4.6 et l'exemple 4.7. Il faut toutefois d'abord énoncer le lemme suivant qui servira à démontrer le théorème 4.6.

**Proposition 4.5.** Soient  $a, b \in \mathbb{N}_*$ ,  $r_1, \dots, r_k$  les  $k$  restes de l'algorithme d'Euclide appliqué au calcul du pgcd de  $a$  et de  $b$  ( $r_k$  étant le dernier reste non nul) et  $q_1, \dots, q_k$  les  $k$  quotients obtenus par cet algorithme. Alors, on trouve que

$$r_i \mid (r_{i-1} - r_{i+1})$$

pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq k$ .

*Démonstration.* En vertu de la définition 1, on sait que

$$r_{i-1} = q_{i-1}r_i + r_{i+1}.$$

On en déduit que

$$r_{i-1} - r_{i+1} = q_{i-1}r_i + r_{i+1} - r_{i+1} = q_{i-1}r_i. \quad \square$$

**Théorème 4.6.** *Soient  $a, b \in \mathbb{N}_*$  tels que  $(a, b) = 1$  et  $k+1$  le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide appliqué au calcul de  $(a, b)$ , c'est-à-dire que  $(a, b) = r_k$  et le reste  $k+1$  est nul. Soient  $r_1, \dots, r_k$  et  $q_1, \dots, q_k$  respectivement les  $k$  restes et les  $k$  quotients obtenus par l'algorithme d'Euclide. Si nous posons  $r_j = p_{k-j}(x_i, \dots, x_{i+k-j-1})$  pour un certain  $i$  et pour tout  $j$  tel que  $-1 \leq j \leq k+1$ , alors on obtient que*

$$(-1)^{k-1}p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) \cdot a + (-1)^k p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) \cdot b = (a, b).$$

*Démonstration.* En vertu de la règle antimodulaire, on sait que :

$$p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1})p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k}) = (-1)^k.$$

Comme  $r_0 = p_k(x_i, \dots, x_{i+k-1})$  et  $r_{-1} = p_{k+1}(x_i, \dots, x_{i+k})$ , on déduit que

$$r_0 p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})r_{-1} = (-1)^k.$$

Ainsi,

$$(-1)^{k-1}p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) \cdot a + (-1)^k p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) \cdot b = 1.$$

Or, en vertu du lemme 4.5, on sait que

$$p_{k-j}(x_i, \dots, x_{i+k-j-1})p_{k-j+1}(x_i, \dots, x_{i+k-j}) - p_{k-j-1}(x_i, \dots, x_{i+k-j-2})$$

pour tout  $j$  tel que  $-1 < j < k$ . Donc la proposition 2.16 appliquée au polynôme continuant nous assure que  $p_{k-1}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})$ ,  $p_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) \in \mathbb{Z}$ . Finalement, en vertu du lemme 2.15,  $p_{k-j}(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-j})$  est déterminé pour tout  $j$  tel que  $0 \leq j \leq k+1$  à partir de la section oblique  $r_{k+1}, r_k, \dots, r_{-1}$ .  $\square$

Notons que poser  $r_j = p_{k-j}(x_i, \dots, x_{i+k-j-1})$  pour un certain  $i$  et pour tout  $j$  tel que  $-1 \leq j \leq k+1$  est équivalent à considérer la portion de section suivante dans une frise :

$$\begin{array}{ccccccc} & & r_{k+1} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & \\ & 1 & & r_k & & 1 & & 1 & \\ & & & & r_{k-1} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & r_1 & \\ & & & & & & & & b \\ & & & & & & & & a \end{array}$$

En vertu du lemme 3.5, il aurait été également possible d'obtenir une diagonale dans l'autre sens en posant plutôt  $r_j = p_{k-j}(x_{i-k+j+1}, \dots, x_i)$  pour un certain



$i$  et pour tout  $j$  tel que  $-1 \leq j \leq k+1$ . Le théorème 4.6 aurait été modifié en conséquence.

Grâce au théorème 4.6, il est possible de trouver des entiers  $s$  et  $t$  tels que  $sa + tb = 1$  si  $a$  et  $b$  sont copremiers. Il suffit d'écrire  $a$  et  $b$  sur une section oblique d'une frise, puis d'écrire les restes successifs d'un élément de la section divisé par le précédent jusqu'à  $r_k = 1$  et en posant  $p_0 = r_k$ . Ainsi,  $r_k$  fait partie de la rangée 0 de la frise, c'est-à-dire la rangée composée de 1. En vertu du lemme 2.15, il est possible de trouver  $k-1$  éléments de la diagonale adjacente, en plus du 0 et du 1 sur les deux premières rangées qui sont déjà connus.

**Exemple 4.7.** Calculons le pgcd de 67 et 55 et, s'il vaut 1, déterminons des entiers  $s$  et  $t$  tels que  $67s + 55t = 1$ .

Divisons 67 par 55, 55 par le reste de cette division et ainsi de suite en inscrivant 67, 55 et les différents restes les uns après les autres sur la diagonale d'une frise :

0									
	1								
		2							
			3						
				5					
					7				
						12			
							55		
								67	

Remarquons ici que  $(67, 55) = 1$ .

Complétons cette frise en écrivant la ligne de 0 à la hauteur du 0 déjà inscrit et la ligne de 1 à la hauteur du 1 déjà inscrit. Servons-nous-en pour déterminer la diagonale adjacente à celle ci-dessus. On obtient :

0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	
		2	2		
			5	3	
				7	
					5
				12	23
					55
					28
					67

Ainsi, en observant que  $23 \cdot 67 - 28 \cdot 55 = 1$ , on déduit que  $s = 23$  et  $t = -28$ . Notons que  $s$  est positif et  $t$  est négatif, car  $s$  est sur une rangée d'ordre pair tandis que  $t$  est sur une rangée d'ordre impair.

Les frises peuvent donc être utilisées pour trouver deux entiers  $s$  et  $t$  tels que  $sa + tb = 1$  quand  $a$  et  $b$  sont deux naturels copremiers. La définition suivante servira par la suite à expliquer l'avantage de déterminer  $s$  et  $t$  à l'aide des frises plutôt que de l'algorithme d'Euclide traditionnel.

**Définition 4.8.** Définissons une étape d'algorithme comme :

- a) le fait de trouver le reste d'une division d'entiers ou
- b) une addition, une soustraction ou une multiplication d'entiers ou
- c) la substitution d'un entier par une expression équivalente.

*Remarque 4.9.* Soient  $a, b \in \mathbb{N}_*$  copremiers et  $k + 1$  le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide appliqué au calcul de  $(a, b)$ , c'est-à-dire que  $(a, b) = r_k$  et le reste  $k + 1$  est nul. Alors, déterminer des valeurs de  $s$  et de  $t$  au moyen de l'algorithme d'Euclide traditionnel ou des frises avec le théorème 4.6 nécessite  $4k + 1$  étapes. Toutefois, l'algorithme d'Euclide traditionnel, contrairement à la méthode par les frises, nécessite de garder en mémoire les quotients obtenus par l'algorithme.

*Démonstration.* La première partie de chacune de ces deux méthodes, celle qui consiste à calculer le pgcd et ainsi déterminer les différents quotients et les différents restes s'effectue en  $k + 1$  étapes, car il y a  $k + 1$  restes de divisions à déterminer.

Par la suite, déterminer  $s$  et  $t$  en remplaçant successivement chacun des restes par les deux précédents requiert  $3k$  étapes. En effet, pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k$ , il faut premièrement remplacer  $r_i$  par  $r_{i-2} - q_i r_{i-1}$  (une étape de substitution). Par la suite, il faut multiplier le facteur de  $r_i$  par  $q_i$  (une multiplication) et additionner le résultat au facteur de  $r_{i-1}$  dans l'expression initiale (une addition). Cela totalise  $3k$  étapes.

Avec les frises, pour calculer les  $k$  éléments de la diagonale adjacente à celle des restes, il faut chaque fois trois étapes. En effet, déterminer un élément à l'aide de la fonction de frise requiert une multiplication, une addition de  $\pm 1$  et une division. On obtient donc  $3k$  étapes encore une fois, mais les  $k$  quotients obtenus par l'algorithme d'Euclide n'ont pas besoin d'être gardés en mémoire.  $\square$

## Références

- [BMRDSM12] Véronique BAZIER-MATTE, David RACICOT-DESLOGES et Tanna SÁNCHEZ MCMILLAN : Friezes and continuant polynomials with parameters. 2012.
- [CC73] J. H. CONWAY et H. S. M. COXETER : Triangulated polygons and frieze patterns. *The Mathematical Gazette*, 57(400):pp. 87–94, 1973.
- [Hag05] R. HAGGARTY : *Mathématiques discrètes appliquées à l'informatique*. Synthex : informatique. Pearson Education France, 2005.

VÉRONIQUE BAZIER-MATTE  
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
 Courriel: Veronique.Bazier-Matte@USherbrooke.ca

# Fractions continues et arbre de Stern-Brocot

Tanna Sánchez McMillan

**RÉSUMÉ** Cet article traite de la relation entre l'arbre de Stern-Brocot et les fractions continues. La notion de fraction continue est, d'abord, succinctement présentée basée sur le concept de polynôme continuant. Ensuite, passant par les suites de Brocot, on explore diverses propriétés de l'arbre de Stern-Brocot pour finalement analyser le lien entre celui-ci et les fractions continues.

## 1 Introduction

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) [Ste58] et par Achille Brocot (1861) [Bro61], horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée. L'arbre est une structure mathématique ayant de très intéressantes propriétés algébriques et combinatoires dont certaines ont été récemment explorées par Graham [GK94]. En outre, plusieurs études comparent l'arbre de Stern-Brocot à d'autres structures combinatoires telles que les suites de Farey et les codes de Gray. D'autre part, l'apparition des fractions continues est attribuée à Euclide vers 300 av. J.-C. En effet, les quotients successifs qui résultent de l'application de l'algorithme d'Euclide à deux entiers sont précisément les nombres qui composent la représentation sous forme de fraction continue du quotient de ces deux entiers. Dernièrement, les fractions continues ont fait leur apparition dans plusieurs autres branches des mathématiques. Ainsi, une étude récente de Rob Corless [Cor92] examine le lien entre les fractions continues et la théorie du chaos.

## 2 Fractions continues

**Définition 2.1.** Soit  $x_i \in \mathbb{Z}$  tel que  $x_i \neq 0$  pour tout  $i \neq 0$ . Une expression de la forme

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{x_n}}}}$$

---

Je tiens à remercier le professeur Ibrahim Assem, qui m'a guidée tout au long de mes recherches, ainsi que le programme des bourses de recherche de premier cycle du CRSNG.

est appelée *fraction continue*. On la dénote  $[x_0; x_1, \dots, x_n]$ . Les  $x_i$  se nomment les *quotients incomplets* de celle-ci.

Notre premier objectif est de trouver une expression récursive pour ces fractions continues. Cela nous mène à la notion de polynôme continuant.

**Définition 2.2.** Soit  $\{x_i\}_{i \geq 0}$  une famille d'indeterminées. Pour chaque entier  $n \geq -1$ , on définit le  $n^e$  *polynôme continuant* comme suit :  $p_{-1} = 0$ ,  $p_0 = 1$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $p_n$  est défini au moyen de la relation de récurrence

$$p_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = x_0 p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + p_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}).$$

Voici par exemple les polynômes continuants d'ordre 1 jusqu'à 4 :

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= x_0 \\ p_2(x_0, x_1) &= x_0 x_1 + 1 \\ p_3(x_0, x_1, x_2) &= x_0 x_1 x_2 + x_0 + x_2 \\ p_4(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0 x_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 + x_0 x_3 + x_2 x_3 + 1. \end{aligned}$$

**Lemme 2.3.** La fraction continue  $[x_0; x_1, \dots, x_n]$  est le quotient de l'évaluation de deux polynômes continuants consécutifs. En d'autres mots, étant donné  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ , on a que

$$[x_0; x_1, \dots, x_n] = \frac{p_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}.$$

*Démonstration.* L'énoncé est prouvé par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a  $\frac{p_1(x_0)}{p_0} = x_0$ . Supposons le résultat vrai pour un  $n \geq 1$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n)}{p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{x_0 p_n(x_1, \dots, x_n) + p_{n-1}(x_2, \dots, x_n)}{p_n(x_1, \dots, x_n)} \\ &= x_0 + \frac{p_{n-1}(x_2, \dots, x_n)}{p_n(x_1, \dots, x_n)} \\ &= x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{x_n}}}} \end{aligned}$$

en vertu de l'hypothèse de récurrence. □

*Remarque 2.4.* On a que

$$\begin{aligned}
 x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \dots \frac{1}{x_{n-2} + \frac{1}{1}}}}} &= \frac{p_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, 1)}{p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, 1)} \\
 &= \frac{p_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2} + 1)}{p_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2} + 1)}.
 \end{aligned}$$

### 3 Suites de Brocot

**Définition 3.1.** On appelle *médiation* l'opération définie par

$$\begin{aligned}
 \left( \mathbb{Q}^+ \cup \left\{ \frac{1}{0} \right\} \right) \times \left( \mathbb{Q}^+ \cup \left\{ \frac{1}{0} \right\} \right) &\rightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \left\{ \frac{i}{0} \right\} \\
 \left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) &\mapsto \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}
 \end{aligned}$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}_*$ .

La fraction  $\frac{a+c}{b+d}$  est appelée la *médiane* des fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ .

L'opération de médiation est commutative, mais elle n'est ni associative ni distributive par rapport à la multiplication. Cette opération n'a pas non plus d'élément neutre.

On rappelle au lecteur qu'une fraction est dite *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont coprimiers.

**Définition 3.2.** La *suite de Brocot d'ordre  $n$* , notée  $B_n$ , est la suite finie et ordonnée des fractions irréductibles telle que  $B_0 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\}$  et que, pour tout  $i \geq 1$ , on construit  $B_i$  en insérant au milieu de chaque couple de fractions adjacentes  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  de  $B_{i-1}$  la médiane  $\frac{a+c}{b+d}$  de celles-ci.

Voici les suites de Brocot d'ordre 0 à 3 :

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\} \\
 B_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \right\} \\
 B_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0} \right\} \\
 B_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \right\}.
 \end{aligned}$$

**Lemme 3.3.** Pour tout  $i \geq 0$ , la suite  $B_i$  est strictement croissante.

*Démonstration.* Soient  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  deux fractions adjacentes de la suite  $B_{i-1}$ . Alors, on a que

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > \frac{1}{b(b+d)} > 0,$$

car  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  entraîne  $ad < bc$ .

De même, on voit facilement que  $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} < 0$ .

On a donc que  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .  $\square$

**Lemme 3.4.** *Si deux fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont adjacentes dans une suite de Brocot  $B_i$ , alors la matrice  $\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$  appartient à  $SL_2(\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $i$ . Le résultat est vrai pour  $B_0$ , car la matrice associée à cette suite est la matrice identité  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  dont le déterminant est 1.

Supposons que l'énoncé est vrai pour un certain  $i > 0$ . Soient  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  deux fractions adjacentes dans la suite  $B_i$ . En vertu de l'hypothèse de récurrence, on a deux cas possibles :

Cas 1 :  $\frac{a}{b} \in B_{i-1}$  et  $\frac{c}{d} \notin B_{i-1}$

Ainsi, on a  $B_{i-1} = \left\{ \dots, \frac{a}{b}, \frac{e}{f}, \dots \right\}$  et  $B_i = \left\{ \dots, \frac{a}{b}, \frac{a+e}{b+f}, \frac{e}{f}, \dots \right\}$ .

En vertu de l'hypothèse de récurrence,  $\det \begin{bmatrix} b & f \\ a & e \end{bmatrix} = 1$ , c'est-à-dire  $be - af =$

1. Ainsi,

$$\det \begin{bmatrix} b & b+f \\ a & a+e \end{bmatrix} = b(a+e) - a(b+f) = be - af = 1$$

Cas 2 :  $\frac{a}{b} \notin B_{i-1}$  et  $\frac{c}{d} \in B_{i-1}$

La preuve est semblable à celle du cas 1.  $\square$

**Corollaire 3.5.** *Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction dans une suite de Brocot. Alors,  $\frac{a}{b}$  est irréductible.*

*Démonstration.* On a montré au lemme 3.4 qu'il existe  $s, t \in \mathbb{N}$  tels que  $as - bt = 1$ . En vertu du Lemme de Bézout, on conclut que  $a$  et  $b$  sont coprimiers.  $\square$

Le théorème suivant montre que les suites de Brocot sont un moyen d'ordonner totalement l'ensemble des fractions positives irréductibles.

**Théorème 3.6.** *Toute fraction positive irréductible apparaît une fois et une seule dans une suite de Brocot.*

*Démonstration.* Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction positive irréductible. On a que  $\frac{0}{1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{0}$  donc  $\frac{a}{b}$  n'appartient pas à  $B_0$ . Supposons que  $\frac{a}{b}$  n'appartienne pas à  $B_i$  pour un certain  $i$ . Alors, il existe deux fractions adjacentes  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$  de  $B_i$  telles que  $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$ . Puis, calculons la médiane  $\frac{m+m'}{n+n'}$ . On se retrouve dans une des trois situations suivantes :

- (i)  $\frac{a}{b} = \frac{m+m'}{n+n'}$ , alors  $\frac{a}{b}$  appartient à la suite  $B_{i+1}$  ;
- (ii)  $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m+m'}{n+n'}$ , alors on remplace la fraction  $\frac{m'}{n'}$  par  $\frac{m+m'}{n+n'}$  et on a que  $\frac{a}{b}$  n'appartient pas à  $B_{i+1}$ . On recommence le processus ;
- (iii)  $\frac{m+m'}{n+n'} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$  alors on remplace la fraction  $\frac{m}{n}$  par  $\frac{m+m'}{n+n'}$  et on a que  $\frac{a}{b}$  n'appartient pas à  $B_{i+1}$ . On recommence le processus.

Cette démarche ne continue pas de façon indéfinie, puisque  $\frac{a}{b} - \frac{m}{n} > 0$  et  $\frac{m'}{n'} - \frac{a}{b} > 0$  entraînent que  $an - bm \geq 1$  et  $bm' - an' \geq 1$ .

On a donc que

$$\begin{aligned} (m' + n')(an - bm) + (m + n)(bm' - an') &\geq m' + n' + m + n \\ a(nm' - n'm) + b(nm' - n'm) &\geq m' + n' + m + n. \end{aligned}$$

En vertu du lemme 3.4 et du fait que les fractions  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m'}{n'}$  soient adjacentes dans un  $B_i$ , on a que  $nm' - n'm = 1$  donc

$$a + b \geq m' + n' + m + n.$$

En d'autres termes, la somme des numérateurs et des dénominateurs des fractions  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$  adjacentes dans  $B_i$  ne dépasse pas la quantité fixe  $a + b$ .

Supposons que cette somme soit strictement plus petite que  $a + b$ . Alors, en remplaçant l'une des fractions  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$  par la médiane, on voit qu'au moins une des quantités  $m', n', m, n$  augmente d'au moins 1. Répétant ce processus tant que  $m' + n' + m + n$  est strictement plus petit que  $a + b$ , on en déduit que dans au plus  $a + b$  étapes, on aura l'égalité, c'est à dire :

$$a + b = m' + n' + m + n.$$

On a donc égalité dans chacune des inégalités plus haut. En particulier, on obtient que

$$an - bm = 1$$

et que

$$bm' - an' = 1.$$

En résolvant ces deux équations, on trouve que  $a = m + m'$  et  $b = n + n'$ . On est donc dans la situation (i).

Enfin, en vertu du lemme 3.3, chaque fraction irréductible apparaît au plus une fois dans une suite de Brocot.  $\square$

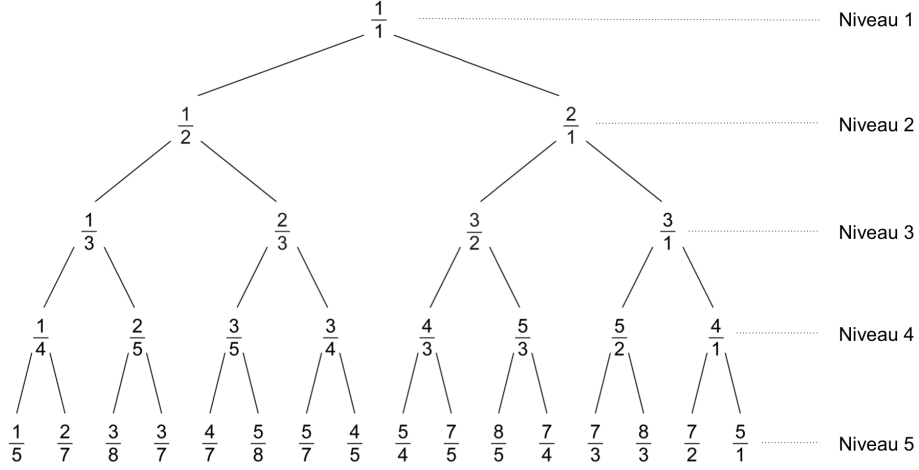


FIGURE 1 – Arbre de Stern-Brocot

## 4 Arbre de Stern-Brocot

Rappelons qu'un arbre est appelé binaire si chaque sommet est adjacent au plus à deux sommets au niveau inférieur, appelés ses fils.

**Définition 4.1.** *L'arbre de Stern-Brocot est défini comme suit : l'ensemble des sommets de cet arbre est l'ensemble des toutes les fractions positives irréductibles. Il existe une arête entre le sommet  $\frac{a}{b}$  au niveau  $i$  de cet arbre et le sommet  $\frac{c}{d}$  au niveau  $i - 1$  si et seulement si  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont des fractions adjacentes dans la suite  $B_i$ . Ainsi, l'arbre de Stern-Brocot est un arbre binaire infini qui se construit à partir des suites de Brocot. Pour tout  $i \geq 1$ , les sommets du niveau  $i$  dans l'arbre sont les médiantes des fractions dans la suite  $B_{i-1}$ . La racine de l'arbre est la fraction  $\frac{1}{1}$  issue de la médiation de  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{0}$  dans  $B_0$ . La figure 1 illustre les cinq premiers niveaux de l'arbre de Stern-Brocot.*

*Remarque 4.2.* Dans les sommets du niveau  $i$  de l'arbre de Stern-Brocot, on ne trouve que les fractions qui apparaissent pour la première fois dans la suite de Brocot d'ordre  $i$ . En d'autres termes, dans le niveau  $i$  de l'arbre on ne trouve que les fractions qui sont éléments de l'ensemble  $B_i \setminus B_{i-1}$ .

**Définition 4.3.** On définit *l'ancêtre gauche*  $\frac{m}{n}$  et *l'ancêtre droit*  $\frac{m'}{n'}$  de la fraction  $\frac{m+m'}{n+n'}$  comme étant le plus proche voisin gauche et le plus proche voisin droit, respectivement, au dessus de  $\frac{m+m'}{n+n'}$  dans l'arbre de Stern-Brocot.

En vertu du lemme 3.3, toute fraction  $\frac{a+c}{b+d}$  se trouve dans l'intervalle  $] \frac{a}{b}, \frac{c}{d} [$  dont les bornes inférieure et supérieure sont ses ancêtres gauche et droit respectivement. Représentons cet intervalle sous forme matricielle par la matrice  $\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$  qui appartient à  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Notons qu'en multipliant cette matrice par le



vecteur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  on obtient le vecteur  $\begin{bmatrix} b+d \\ a+c \end{bmatrix}$  et la pente de la droite qui passe par le point correspondant au second vecteur et l'origine est  $\frac{a+c}{b+d}$ .

D'ailleurs, chaque sommet de l'arbre de Stern-Brocot peut être représenté de façon unique par une suite de déplacements vers le bas en partant du sommet  $\frac{1}{1}$  :

$$D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}},$$

où  $D$  représente un déplacement vers la droite,  $G$  représente un déplacement vers la gauche et  $x_i$  est le nombre de fois que le déplacement est itéré avec  $x_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in \mathbb{N}_*$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  et  $x_{n-1} \in \mathbb{N}$ .

*Notation 4.4.* Soit  $f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}})$  la fraction positive irréductible obtenue à partir de l'arbre de Stern-Brocot en suivant la suite de déplacements  $D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}}$ .

**Exemple 4.5.**  $f(D^0G^1D^1G^2) = \frac{4}{7}$ .

*Notation 4.6.* Soit la fonction

$$g : SL_2(\mathbb{N}_*) \rightarrow \mathbb{Q}_{*+}$$

définie par

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \frac{\gamma + \delta}{\alpha + \beta}.$$

où  $SL_2(\mathbb{N}_*)$  est l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbb{N}_*$  et dont le déterminant est 1.

**Proposition 4.7.** Soit  $\bar{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\bar{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Alors, on a

$$f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}}) = g(\bar{D}^{x_0}\bar{G}^{x_1}\bar{D}^{x_2}\bar{G}^{x_3}\dots \bar{D}^{x_{n-2}}\bar{G}^{x_{n-1}})$$

pour  $x_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in \mathbb{N}_*$  pour  $i \geq 1$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $n$ .

Soit  $M = D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}}$  une suite de déplacements telle que  $f(M)$  se trouve au niveau  $i \geq 1$  de l'arbre de Stern-Brocot. Si  $i = 1$ , alors  $f(M) = \frac{1}{1}$  est la médiane de  $f(N_1) = \frac{0}{1}$  et de  $f(N_2) = \frac{1}{0}$  et la paire  $(f(N_1), f(N_2))$  est représentée par la matrice identité  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Supposons  $i \geq 2$  et que  $f(N_1) = \frac{a}{b}$  et  $f(N_2) = \frac{c}{d}$  sont deux fractions adjacentes à  $f(M) = \frac{a+c}{b+d}$  dans  $B_i$ . Sans perte de généralité, on peut supposer  $f(N_1)$  de niveau  $i-1$ , et  $f(N_2)$  au plus de niveau  $i-2$ .

Dans le premier cas, celui où  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ , on a  $f(M) = f(N_1, D)$  et, par ailleurs, la matrice résultant d'un déplacement vers la droite,  $D$ , est

$$\begin{bmatrix} b+d & d \\ a+c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} \bar{D}.$$

Dans le second cas, celui où  $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ , on a  $f(M) = f(N_1G)$  et par ailleurs, la matrice résultant d'un déplacement vers la gauche,  $G$ , est

$$\begin{bmatrix} b & b+d \\ a & a+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} \bar{G}.$$

Posant  $\bar{M} = \bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1} \dots \bar{D}^{x_{n-2}} \bar{G}^{x_{n-1}}$ , l'hypothèse de récurrence dit que  $f(N_1) = g(\bar{N}_1)$ . La première égalité matricielle plus haut donne que  $f(M) = f(N_1D) = g(\bar{N}_1\bar{D})$  et la seconde que  $f(M) = f(N_1G) = g(\bar{N}_1\bar{G})$ .  $\square$

**Exemple 4.8.**  $\bar{D}^0 \bar{G}^1 \bar{D}^1 \bar{G}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  et  $g\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{4}{7} = f(D^0 G^1 D^1 G^2)$ .

Résumons à l'aide de la figure 2.

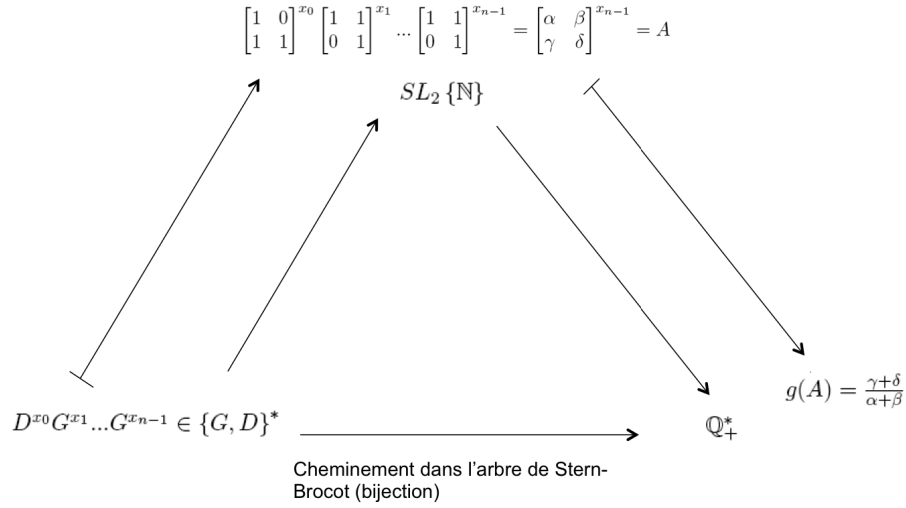


FIGURE 2 – Résumé

Chaque suite du monoïde libre  $\{G, D\}^*$  peut s'exprimer par un produit des matrices  $\bar{G}$  et  $\bar{D}$ . On obtient la fraction  $r = \frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}$  en appliquant la fonction  $g$  à la matrice  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  qui résulte de ce produit.

**Lemme 4.9.** On a que  $\bar{G}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\bar{D}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$ .

*Démonstration.* C'est une simple récurrence sur  $n$ .  $\square$

**Lemme 4.10.** On a que

$$\bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1} \bar{D}^{x_2} \bar{G}^{x_3} \dots \bar{D}^{x_{n-2}} \bar{G}^{x_{n-1}} = \begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) & p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}) & p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

*Démonstration.* On procède par récurrence en utilisant la définition 2.2 de polynôme continuant.

Si  $n = 2$ , on a que

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1(x_1) \\ p_1(x_0) & p_2(x_0, x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_0 & x_0x_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1}.$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence, on a que

$$\begin{aligned} & \bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1} \bar{D}^{x_2} \bar{G}^{x_3} \dots \bar{D}^{x_n} \bar{G}^{x_{n+1}} \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) & p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}) & p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) + p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n & p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}) + p_n(x_0, \dots, x_{n-1})x_n & p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_n(x_1, \dots, x_n) & p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ p_{n+1}(x_0, \dots, x_n) & p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_n(x_1, \dots, x_n) & p_n(x_1, \dots, x_n)x_{n+1} + p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ p_{n+1}(x_0, \dots, x_n) & p_{n+1}(x_0, \dots, x_n)x_{n+1} + p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_n(x_1, \dots, x_n) & p_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ p_{n+1}(x_0, \dots, x_n) & p_{n+2}(x_0, \dots, x_{n+1}) \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 4.11.** *Pour tout sommet  $D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3} \dots D^{x_n}G^{x_{n-1}}$  de l'arbre de Stern-Brocot, il existe une fraction continue  $[x_0; x_1, \dots, x_{n-1}]$  telle que*

$$f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3} \dots D^{x_n}G^{x_{n-1}}) = [x_0; x_1, \dots, x_{n-1} + 1].$$

*Démonstration.* On a que

$$\begin{aligned} & f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3} \dots D^{x_n}G^{x_{n-1}}) \\ &= g(\bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1} \bar{D}^{x_2} \bar{G}^{x_3} \dots \bar{D}^{x_{n-2}} \bar{G}^{x_{n-1}}) \\ &= g\left(\begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) & p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}) & p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}) + p_n(x_0, \dots, x_{n-1})}{p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) + p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} \\ &= \frac{p_{n+1}(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)}{p_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)} \\ &= \frac{p_n(x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + 1)}{p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + 1)} \end{aligned}$$

en vertu de la remarque 2.4. Puis, il suit du lemme 2.3 que

$$\begin{aligned} g(\bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1} \bar{D}^{x_2} \bar{G}^{x_3} \dots \bar{D}^{x_{n-2}} \bar{G}^{x_{n-1}}) &= x_0 + \frac{1}{x_1 + \dots + \frac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{1}}} \\ &= [x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, 1]. \quad \square \end{aligned}$$

*Remarque 4.12.* De même, on peut facilement retrouver le chemin dans l'arbre de Stern-Brocot correspondant à une fraction continue finie :

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \dots \frac{1}{x_{n-1}}} = f(D^{x_0} G^{x_1} D^{x_2} G^{x_3} \dots D^{x_{n-2}} G^{x_{n-1}-1}).$$

**Exemple 4.13.**  $f(D^0 G^1 D^1 G^2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{4}{7}.$

**Lemme 4.14.** *La médiane de deux fractions continues*

$$\frac{k}{l} = [x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a}{b}] \text{ et } \frac{k'}{l'} = [x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{c}{d}]$$

ayant les mêmes premiers quotients incomplets  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  dans le même ordre est  $[x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{e}{f}]$ , où  $\frac{e}{f}$  est la fraction médiane de  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 2.3,

$$\begin{aligned} \frac{k}{l} &= \frac{p_{n+1}(x_0, \dots, x_{n-1}, \frac{a}{b})}{p_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a}{b})} \\ &= \frac{p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \frac{a}{b} + p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \frac{a}{b} + p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})} \\ &= \frac{ap_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + bp_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{ap_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + bp_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})}. \end{aligned}$$

De façon semblable,  $\frac{k'}{l'} = \frac{cp_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + dp_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{cp_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + dp_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})}$ , donc

$$\begin{aligned} \frac{k}{l} \oplus \frac{k'}{l'} &= \frac{(a+c)p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + (b+d)p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{(a+c)p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + (b+d)p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})} \\ &= \frac{\frac{a+c}{b+d}p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{\frac{a+c}{b+d}p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})} \\ &= \frac{p_{n+1}(x_0, \dots, x_{n-1}, \frac{a+c}{b+d})}{p_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a+c}{b+d})} \\ &= \left[ x_0; \dots, x_{n-1}, \frac{a+c}{b+d} \right]. \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant provient de [Luc91].

**Proposition 4.15.** *La fraction  $\frac{a}{b}$  comprise entre 0 et 1 dont le développement en fraction continue est  $[0; x_1, \dots, x_n]$  apparaît sous forme irréductible au  $(\sum_{i=1}^n x_i)^e$  niveau de l'arbre de Stern-Brocot.*

*Démonstration.* Soit  $\frac{a}{b} = [x_0; x_1, \dots, x_n]$ . Alors,  $\frac{1}{x_1+1} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{x_1}$ .

Dans la suite  $B_{(x_1+1)}$ , les fractions  $\frac{1}{x_1+1}$  et  $\frac{1}{x_1}$  sont consécutives, plus précisément, elles sont le deuxième et le troisième élément de cette suite respectivement. Alors, d'après le lemme 3.3,  $\frac{a}{b}$  se retrouve pour la première fois dans une suite ultérieure à  $B_{(x_1+1)}$  et entre  $\frac{1}{x_1+1}$  et  $\frac{1}{x_1}$ .

Maintenant, on calcule la médiane de  $\frac{1}{x_1+\frac{1}{1}}$  et  $\frac{1}{x_1+\frac{0}{1}}$  en appliquant le lemme précédent. On obtient  $\frac{1}{x_1+\frac{1}{2}}$  qui se trouve pour la première fois dans la suite  $B_{(x_1+2)}$ . Puis, on calcule la médiane de cette fraction et de  $\frac{1}{x_1+\frac{0}{1}}$ . En répétant cette opération de médiation un total de  $x_2 - 1$  fois, on obtient la fraction continue  $\frac{1}{x_1+\frac{1}{x_2}}$ , qui apparaît pour la première fois dans la suite  $B_{(x_1+x_2)}$ . Ainsi, en vertu de la construction de l'arbre de Stern-Brocot,  $\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1+\frac{1}{x_2}}$  se trouve dans le  $(x_1 + x_2)^e$  niveau de l'arbre.

En vertu de l'hypothèse de récurrence,  $[0; x_1, \dots, x_{n-1} + 1]$  se trouve sur un sommet du  $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 1)^e$  niveau de l'arbre de Stern-Brocot et alors apparaît pour la première fois dans la suite  $B_{(x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+1)}$ . De plus, dans cette suite,  $[0; x_1, \dots, x_{n-1} + 1]$  et  $[0; x_1, \dots, x_{n-1}]$  sont consécutives. Si on calcule la médiane de ces deux fractions, on obtient  $[0; x_1, \dots, x_{n-1}, 2]$  qui apparaît pour la première fois dans la suite  $B_{(x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+2)}$ . Si on répète cette opération de médiation un total de  $x_n - 1$  fois, on obtient la fraction continue  $[0; x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$  qui apparaît pour la première fois dans la suite  $B_{(\sum_{i=1}^n x_i)^e}$  et, en vertu de la construction de l'arbre de Stern-Brocot, se trouve au  $(\sum_{i=1}^n x_i)^e$  niveau de celui-ci.  $\square$

## Références

- [Bro61] Achille BROCAT : Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode. *Revue Chonométrique*, 3:186–194, 1861.
- [Cor92] Robert CORLESS : Continued fractions and chaos. *The American Mathematical Monthly*, 99(3):203–215, 1992.
- [GK94] Ronald L. GRAHAM et Donald E. KNUTH : *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Boston, MA, USA, 1994.
- [Luc91] Edouard LUCAS : *Théorie des nombres*. Jacques Gabay, Paris, 1891.
- [Ste58] Moritz STERN : Über eine zahlentheoretische funktion. *Crelle's Journal*, 55:193–220, 1858.

# Frises alternées

David Racicot-Desloges

**RÉSUMÉ** Les *frises* telles qu'introduites par Conway et Coxeter peuvent être définies alternativement en utilisant la notion de répétition de carquois de type  $\mathbb{A}_n$ . Cet article propose une définition semblable pour un sous-cas non trivial de *c-frises* (telles qu'introduites dans [BRS13]). Ces frises, dites *frises alternées*, possèdent certaines propriétés particulières qui sont exposées. Il est aussi expliqué de quelle manière les frises alternées sont liées aux frises de Conway et Coxeter (et, par le fait même, aux triangulations de polygones).

## 1 Introduction

Les frises sont introduites comme objet mathématique par Coxeter dans [Cox71] et sont étudiées par Conway et Coxeter dans [CC73a, CC73b]. Elles connaissent un regain d'intérêt au début des années 2000 avec l'introduction des algèbres amassées par Fomin et Zelevinsky (voir [FZ02, FZ03]), puisqu'elles permettent de calculer les variables amassées des algèbres amassées de type  $\mathbb{A}_n$  (voir [ARS10] pour plus de détails). Les frises de Conway et Coxeter sont un cas particulier de *c-frises*, introduites dans [BRS13] dans le but d'étudier une nouvelle classe d'algèbres amassées à coefficients.

L'objectif de cet article est d'étudier un autre cas particulier des *c-frises* : les frises alternées. Afin de définir adéquatement ces frises, certaines notions sur les carquois sont d'abord rappelées. La suite de l'article est consacrée à expliciter les principales propriétés des frises alternées, particulièrement une condition suffisante pour qu'une frise alternée soit uniquement composée d'éléments non nuls, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une frise alternée soit uniquement composée d'entiers. La dernière section est consacrée à expliquer les liens qui existent entre les frises alternées et les frises de Conway et Coxeter et, par le fait même, entre les frises alternées et les triangulations de polygones convexes (au sens de [CC73a, CC73b]).

---

Cet article a été rédigé dans le cadre d'un stage de recherche de premier cycle à l'Université de Sherbrooke. Je remercie la Faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke pour le financement, ainsi que le professeur Ibrahim Assem pour le financement et sa supervision vivement appréciée. Je tiens aussi à remercier chaleureusement Véronique Bazier-Matte et Tanna Sánchez, avec qui ce travail a été effectué.

## 2 Carquois

L'objectif de cette section est de rappeler au lecteur certaines notions sur les carquois, afin d'établir un cadre adéquat pour définir les frises alternées.

**Définition 2.1.** Un *carquois*  $Q$  est un quadruplet  $(Q_0, Q_1, s, b)$ , où  $Q_0$  est un ensemble dont les éléments sont appelés *sommets*,  $Q_1$  est un ensemble dont les éléments sont appelés *flèches* et  $s$  et  $b$  sont des fonctions  $Q_1 \rightarrow Q_0$  qui associent respectivement une *source* et un *but* à chaque flèche de  $Q$ .

**Définition 2.2.** Un carquois est *fini* s'il admet un nombre fini de sommets et de flèches.

**Définition 2.3.** Dans un carquois, un *chemin*  $c$  est une suite finie de flèches  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  telles que  $s(\alpha_{k+1}) = b(\alpha_k)$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

**Définition 2.4.** Un *cycle orienté* est un chemin  $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  tel que  $s(\alpha_1) = b(\alpha_n)$ . Un carquois sans cycle orienté est dit *acyclique*.

**Exemple 2.5.** Le célèbre carquois de Kronecker,

$$1 \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{matrix} 2 ,$$

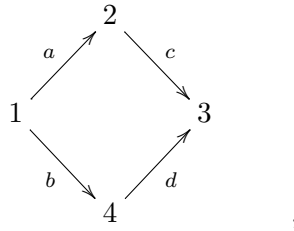
est tel que  $Q_0 = \{1, 2\}$ ,  $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$ ,  $s(\alpha) = s(\beta) = 1$  et  $b(\alpha) = b(\beta) = 2$ . Ce carquois est fini et acyclique.

**Exemple 2.6.** Par exemple, le carquois

$$Q = \alpha \curvearrowright 1 \begin{matrix} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{matrix} 2 \curvearrowright \delta$$

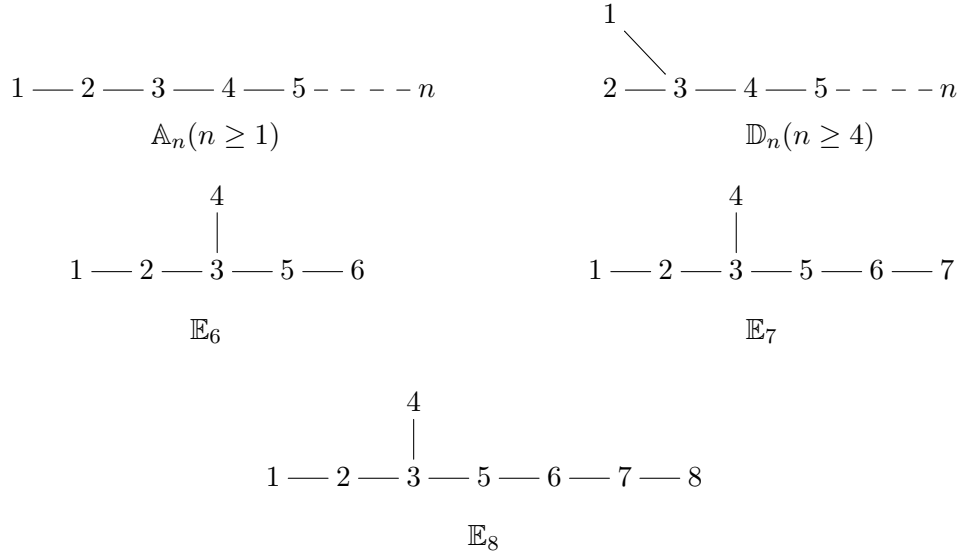
est tel que  $Q_0 = \{1, 2\}$  et  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ . On a aussi  $s(\alpha) = s(\beta) = 1$ ,  $s(\gamma) = s(\delta) = 2$ ,  $b(\alpha) = b(\gamma) = 1$  et  $b(\beta) = b(\delta) = 2$ . Ce carquois est fini, mais n'est pas acyclique. En particulier, le chemin  $c = \beta\gamma$  est un cycle orienté.

**Exemple 2.7.** Le carquois  $Q$ , donné par



est tel que  $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $Q_1 = \{a, b, c, d\}$ . Il est fini et acyclique.

*Remarque 2.8.* Soit  $Q$  un carquois tel que  $|Q_0| = n$ . Pour le reste de l'article, on conviendra de numéroter les sommets de  $Q$  de 1 à  $n$ , afin d'uniformiser la notation.

FIGURE 1 – Graphes de type Dynkin  $\mathbb{A}_n$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$  et  $\mathbb{E}_8$ 

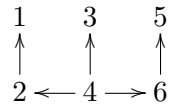
On rappelle au lecteur qu'un graphe est de type Dynkin  $\mathbb{A}_n$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$  ou  $\mathbb{E}_8$ , respectivement, s'il est tel qu'explicité dans la figure 1.

*Remarque 2.9.* L'indice d'un graphe de type Dynkin indique son nombre de sommets.

**Définition 2.10.** Un carquois est de *type Dynkin* si et seulement s'il est une orientation des graphes  $\mathbb{A}_n$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$  ou  $\mathbb{E}_8$ .

**Exemple 2.11.**

a) Le carquois donné par



est de type Dynkin, puisqu'il est une orientation de  $\mathbb{E}_6$ .

b) Les carquois linéairement orientés,

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \cdots \longrightarrow n ,$$

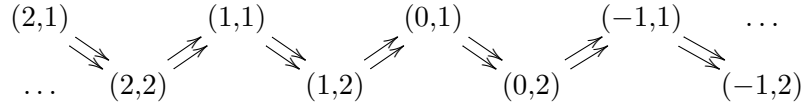
sont de type Dynkin, puisqu'ils sont une orientation d'un graphe de type  $\mathbb{A}_n$ . Dans le reste de l'article, ces carquois sont notés  $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$  (à la manière de [Cha12]). On convient de numérotter les sommets d'un carquois linéairement orienté comme dans l'exemple ci-dessus.



**Définition 2.12.** On définit la *répétition*  $\mathbb{Z}Q = ((\mathbb{Z}Q)_0, (\mathbb{Z}Q)_1)$  d'un carquois  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ , par :

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}Q)_0 &= \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(k, i) \mid k \in \mathbb{Z}, i \in Q_0\} \text{ et} \\ (\mathbb{Z}Q)_1 &= \{(k, \alpha) : (k, i) \rightarrow (k, j) \mid k \in \mathbb{Z}, \alpha : i \rightarrow j\} \cup \\ &\quad \{(k, \alpha') : (k, j) \rightarrow (k-1, i) \mid k \in \mathbb{Z}, \alpha : i \rightarrow j\} . \end{aligned}$$

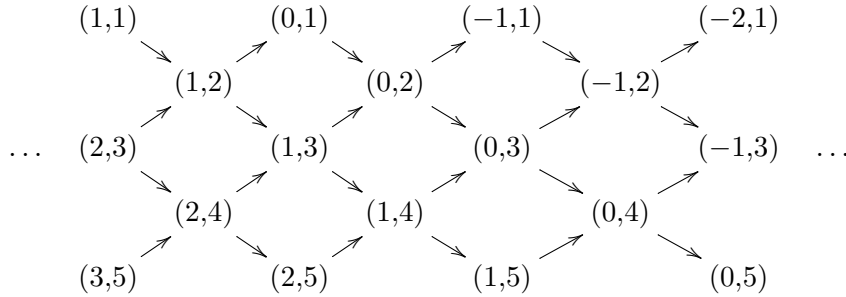
**Exemple 2.13.** La répétition du carquois de Kronecker est :



**Exemple 2.14.** La répétition du carquois

$$\overrightarrow{\mathbb{A}}_5 = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

est :



### 3 Fonction de frises alternées

Cette section est consacrée à la construction de la fonction de frises alternées. Afin d'y parvenir, il est préalablement abordé la notion de fonction de frises monotones (dans le sens de [BRS13]), un cas général des frises alternées.

#### 3.1 Frises monotones

**Définition 3.1.** Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique,  $K$  un corps ordonné et  $c \in K_*$  une constante telle que  $|c|^{\frac{n+1}{2}} \in K_*$ . Une *fonction de frise monotone*  $f$  est une fonction  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow K$ , telle que :

$$f(k, i) f(k+1, i) = \begin{cases} (-c)^i + \prod_{(l, j) \rightarrow (k, i)} f(l, j) & \text{pour tout } i < n \\ (-c)^i + (-\text{signe}(c))^{\mu(k)} |c|^{\frac{n+1}{2}} \prod_{(l, j) \rightarrow (k, i)} f(l, j) & \text{pour } i = n, \end{cases}$$

où

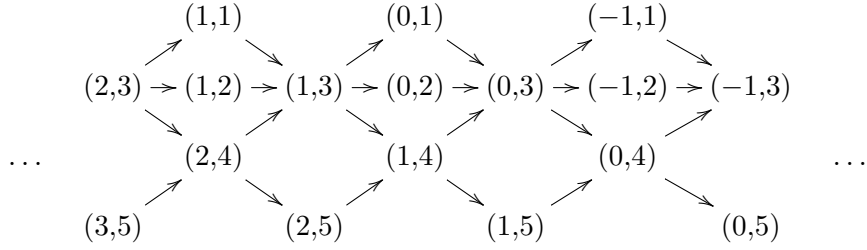
$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \end{array} \end{cases}$$

$$\text{et } \text{signe}(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c > 0 \\ -1 & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

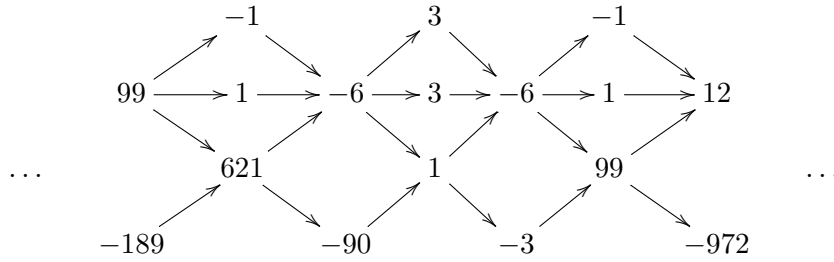
**Exemple 3.2.** Soit le carquois de type Dynkin

$$Q = \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & & \searrow & & & & \\ 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5, \end{array}$$

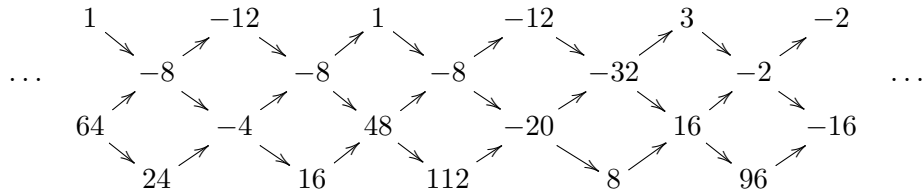
dont la répétition est donnée par



Un exemple de frise monotone obtenue à partir de  $Q$  sur le corps des rationnels  $\mathbb{Q}$  et avec  $c = -3$  est :



**Exemple 3.3.** Soit  $Q$  le carquois  $\vec{\mathbb{A}}_4$ . Un exemple de frise monotone obtenue à partir de  $Q$  sur le corps des rationnels  $\mathbb{Q}$  et avec  $c = 4$  est :



*Remarque 3.4.* Dans la suite de l'article, seules les frises monotones sur les carquois  $\vec{\mathbb{A}}_n$  sont considérées. Ainsi, l'appellation *frise monotone* désigne automatiquement une frise monotone obtenue à partir d'un tel carquois. Puisqu'il n'y a plus d'ambiguïté, il est dorénavant omis de dessiner les flèches dans les frises. Ainsi, la frise monotone de l'exemple précédent est maintenant représentée par :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & -12 & & 1 & & -12 & & 3 & & -2 \\
 \dots & & -8 & & -8 & & -8 & & -32 & & -2 & \dots \\
 & 64 & & -4 & & 48 & & -20 & & 16 & & -16 \\
 & & 24 & & 16 & & 112 & & 8 & & 96
 \end{array}$$

**Exemple 3.5.** Voici une frise monotone sur le corps  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ , obtenue avec  $c = 2$  :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 3 + \sqrt{2} & & & & -3 & & & & 4 & & & & -1 & & & & 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \dots & & -7 - 3\sqrt{2} & & & & -10 & & & -2 & & & & -3 - \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & \dots \\
 & 1 + 3\sqrt{2} & & & & -22 - 10\sqrt{2} & & & & 4 & & & & -2 - \sqrt{2} & & & & 6 + 7\sqrt{2} \\
 & & & 2 + 10\sqrt{2} & & & & 8 + 4\sqrt{2} & & & 2\sqrt{2} & & & & 4 + 6\sqrt{2}
 \end{array}$$

*Remarque 3.6.* Dans le cas présent, la fonction de frise monotone peut être réécrite comme suit (pour  $n \geq 2$ ) :

$$f(k, i)f(k+1, i) = \begin{cases} (-c) + f(k+1, i+1) & \text{pour } i = 1 \\ (-c)^i + f(k+1, i+1)f(k, i-1) & \text{pour } 1 < i < n \\ (-c)^n + (-\text{signe}(c))^{\mu(k)}|c|^{\frac{n+1}{2}}f(k, i-1) & \text{pour } i = n. \end{cases}$$

*Remarque 3.7.* Lorsque  $c = -1$ , la fonction de frise monotone est beaucoup plus simple. Elle peut être réécrite comme suit (pour  $n \geq 2$ ) :

$$f(k, i)f(k+1, i) = \begin{cases} 1 + f(k+1, i+1) & \text{pour } i = 1 \\ 1 + f(k+1, i+1)f(k, i-1) & \text{pour tout } 1 < i < n \\ 1 + f(k, i-1) & \text{pour } i = n. \end{cases}$$

Ces frises sont celles de Conway et Coxeter (voir [CC73a] et [CC73b]), aussi étudiées par Fraser Martineau et Lavertu (voir [FL10]).

### 3.2 Frises alternées

**Définition 3.8.** Une frise monotone sur  $\mathbb{Q}$  est dite *alternée* si et seulement si  $c = 1$ . Une frise alternée obtenue à partir d'un carquois  $\mathbb{A}_n$  (c'est-à-dire ayant  $n$  sommets) sera dite d'*ordre*  $n$ .

**Exemple 3.9.** Voici un exemple de frise alternée :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & -1 & & -3 & & \frac{2}{5} & & -5 & & \frac{2}{5} & & -1 & & -1 \\
 \dots & \frac{3}{5} & & 2 & & 0 & & 4 & & -\frac{1}{5} & & -2 & & -1 & & -1 & & \frac{3}{5} & & 2 \\
 & & \frac{1}{5} & & -1 & & 1 & & \frac{3}{5} & & 1 & & -1 & & 0 & & 4 & & -\frac{1}{5} \\
 & & & & \frac{2}{5} & & & & \frac{2}{5} & & & & & & -1 & & 3 & & \frac{2}{5} \\
 & & & & & & 5 & & & & 1 & & -1 & & -1 & & & & 1
 \end{array}$$

**Exemple 3.10.** Voici un autre exemple de frise alternée :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -1 & 2 & -4 & 1 & & \\
 -3 & & -1 & -5 & -2 & -3 & -3 & -1 & -7 & -3 & -1 & \\
 \dots & 2 & -2 & 3 & -5 & 2 & -2 & 3 & -5 & 2 & \dots & \\
 & 3 & 3 & 1 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 3 & \\
 & 4 & -1 & 2 & -4 & 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & & 
 \end{array}$$

*Remarque 3.11.* La fonction de frise alternée est la suivante (pour  $n \geq 2$ ) :

$$f(k,i)f(k+1,i) = \begin{cases} -1 + f(k+1,i+1) & \text{pour } i = 1 \\ (-1)^i + f(k+1,i+1)f(k,i-1) & \text{pour tout } 1 < i < n \\ (-1)^n + (-1)^{\mu(k)}f(k,i-1) & \text{pour } i = n, \end{cases}$$

$$\text{où } \mu(k) = \begin{cases} 0 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair.} \end{array} \end{cases}$$

*Remarque 3.12.* Comme conséquence directe de cette fonction de frise, les frises alternées contenant des zéros (par exemple celle de l'exemple 3.9) ne possèdent pas toutes les mêmes propriétés que les frises alternées sans zéros. Ainsi, le présent article n'est consacré qu'aux frises alternées ne contenant aucun zéro. Dans la suite, lorsque l'appellation *frise alternée* est utilisée, c'est donc pour désigner une frise alternée sans zéros. Un des résultats principaux de cet article est une condition suffisante pour construire des frises alternées sans zéros. Pour plus de détails concernant les frises alternées avec zéros, on réfère le lecteur à [BRS13].

À partir de la définition de la fonction de frise alternée, il est possible de déduire que chaque losange, ou *maille*, de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 & f(k,i-1) & \\
 f(k+1,i) & & f(k,i) \\
 & f(k+1,i+1) & 
 \end{array},$$

est tel que  $f(k,i)f(k+1,i) = f(k,i-1)f(k+1,i+1) + (-1)^i$ . Cette règle est appelée *règle unimodulaire*, puisqu'elle peut être écrite comme étant le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} f(k,i) & f(k,i-1) \\ f(k+1,i+1) & f(k+1,i) \end{vmatrix} = (-1)^i,$$

soit le déterminant d'une matrice de  $GL_2(\mathbb{Q})$ . À partir de la règle unimodulaire, il est possible d'étendre la fonction de frises alternées de deux lignes vers le haut et vers le bas.

**Proposition 3.13.** *On a que :*

a)  $f(k, -1) = 0$  pour tout  $k$  ;

b)  $f(k, 0) = 1$  pour tout  $k$  ;

$$c) f(k, n+1) = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{array} \\ -1 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair;} \end{array} \end{cases}$$

d)  $f(k, n+2) = 0$  pour tout  $k$ .

*Démonstration.* On montre d'abord b) à partir de la règle unimodulaire appliquée à la maille

$$\begin{array}{ccccc} & & f(k, 0) & & \\ & & \downarrow & & \\ f(k+1, 1) & & & & f(k, 1) \\ & & f(k+1, 2) & & \end{array}$$

Pour tout  $k$ , on a que

$$f(k, 1)f(k+1, 1) = f(k, 0)f(k+1, 2) - 1,$$

qui peut se réécrire, à partir de la définition de la fonction de frise alternée, comme

$$-1 + f(k+1, 2) = f(k, 0)f(k+1, 2) - 1$$

et cette égalité n'est vérifiée que si  $f(k, 0) = 1$ . On montre ensuite a). La règle unimodulaire stipule que, pour tout  $k$ ,

$$f(k, 0)f(k+1, 0) = f(k, -1)f(k+1, 1) + 1.$$

Or, en appliquant la partie b), on a que, pour tout  $k$ ,

$$1 = f(k, -1)f(k+1, 1) + 1,$$

d'où

$$f(k, -1) = 0.$$

Les preuves des parties c) et d) sont semblables et sont omises.  $\square$

Ainsi, la frise alternée de l'exemple 3.10 peut être représentée par :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & & -2 & & 3 & & -1 & & 4 & & -1 & & 2 & & -4 & & 1 \\
 -3 & & -1 & & -5 & & -2 & & -3 & & -3 & & -1 & & -7 & & -3 & & -1 \\
 \dots & 2 & & -2 & & 3 & & -5 & & 2 & & -2 & & 3 & & -5 & & 2 & & \dots \\
 & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 & & 5 & & 2 & & 3 & & 3 \\
 & 4 & & -1 & & 2 & & -4 & & 1 & & -2 & & 3 & & -1 & & 4 & & \\
 -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Cette représentation est appelée *frise alternée étendue* dans [FL10]. La même appellation est utilisée dans le présent article.

*Remarque 3.14.* La proposition 3.13 n'est pas vraie si l'on considère les frises alternées avec zéros.

## 4 Propriétés des frises alternées

L'objectif de cette section est d'expliciter les propriétés principales des frises alternées. Celles-ci permettent d'énoncer, dans la section suivante, les résultats principaux pour construire une frise alternée sans zéros et une frise alternée d'entiers. Les résultats suivants sont en majorité des applications de ceux de [BRS13].

### 4.1 Construction

**Définition 4.1.** [ASS06, p. 302] Une *section*  $\Sigma$  d'un carquois  $\mathbb{A}_n$  est un sous-ensemble des sommets de  $\mathbb{A}_n$  tel que  $|\Sigma| = n + 4$  et tel que si  $(k, i) \in \Sigma$ , alors :

- a)  $(k, i - 1) \in \Sigma$  ou bien  $(k - 1, i - 1) \in \Sigma$  et
- b)  $(k + 1, i + 1) \in \Sigma$  ou bien  $(k, i + 1) \in \Sigma$ ,

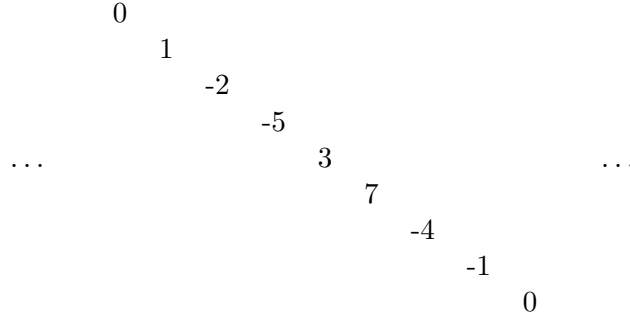
lorsque ces sommets sont définis.

Une section  $\Sigma$  est dite *diagonale* (dans le sens de [CC73a, CC73b, FL10]) si tous ses éléments sont de la forme  $(k_0, i)$ , avec  $k_0$  fixé.

**Exemple 4.2.** Voici l'image d'une section non diagonale par la frise de l'exemple 3.10 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & -2 & & \\
 & & & -1 & & & \\
 \dots & & 2 & & & & \dots \\
 & & 3 & & & & \\
 & & -1 & & & & \\
 & & -1 & & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

Voici l'image d'une section diagonale par la même frise :



Pour le reste de l'article, l'image d'une section par une frise est simplement appelée la *section* d'une frise.

**Proposition 4.3.** *Une frise alternée est entièrement déterminée par une de ses sections.*

*Démonstration.* Soit  $\Sigma$  cette section. On trace entre deux sommets adjacents de  $\Sigma$  une flèche, orientée de la gauche vers la droite. Le carquois résultant est une orientation de  $\mathbb{A}_n$  et admet par conséquent au moins une source  $(k, i)$ . Puisque  $f(-1, i)$  et  $f(n+1, i)$  sont connus pour tout  $i$ , l'élément  $f(k-1, i)$  est déduit de la règle unimodulaire. En utilisant successivement le même raisonnement sur la nouvelle section  $\Sigma' = (\Sigma \setminus \{(k, i)\}) \cup \{(k-1, i)\}$ , on trouve tous les éléments à droite de la section initiale  $\Sigma$ . En utilisant le même raisonnement avec les puits, on trouve tous les éléments à gauche de  $\Sigma$ .  $\square$

## 4.2 Polynômes continnants d'Euler

**Définition 4.4.** Soit  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_*}$  une famille dénombrable d'indéterminées. Le  $n^e$  polynôme continuant d'Euler (avec  $n \geq 1$ ) est défini par

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + p_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}),$$

avec les conditions initiales  $p_{-1} = 0$  et  $p_0 = 1$ .

Par exemple, les premiers polynômes continnants d'Euler sont :

$$\begin{aligned}
 p_1(x_1) &= x_1; \\
 p_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + 1; \\
 p_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_3; \\
 p_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4 + 1.
 \end{aligned}$$

Les résultats suivants montrent que les éléments d'une frise alternée peuvent être exprimés comme l'évaluation de polynômes continnants d'Euler en les éléments sur la première rangée (sans compter les rangées de 0 et de 1).

**Proposition 4.5.** *Pour tout  $k$  et pour tout  $i \geq -1$ , les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = p_i(x_{k-i+1}, x_{k-i+2}, \dots, x_k),$$

où  $x_l = f(l, 1)$  pour tout  $l$ .

*Démonstration.* Selon la proposition 3.13, on a bien que  $f(k, 0) = 1 = p_0$  pour tout  $k$  et  $f(k, -1) = 0 = p_{-1}$  pour tout  $k$ . La preuve se fait alors par récurrence d'ordre 2 sur  $i$ . Pour  $i = 1$ , on a directement que

$$f(k, 1) = x_k = p_1(x_k) \text{ pour tout } k.$$

Pour  $i = 2$ , on utilise la règle unimodulaire, de sorte que :

$$f(k-1, 1)f(k, 1) = f(k-1, 0)f(k, 2) - 1$$

et, puisque  $f(k, 0) = 1$  pour tout  $k$  et  $f(k-1, 0) = 1$  pour tout  $k$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} f(k, 2) &= f(k-1, 1)f(k, 1) + f(k, 0) \\ &= x_{k-1}p_1(x_k) + p_0 \\ &= p_2(x_{k-1}, x_k). \end{aligned}$$

On suppose alors l'énoncé vérifié pour un  $i \geq 2$  et pour  $i-1$ . On veut alors montrer que

$$f(k, i+1) = p_{i+1}(x_{k-i}, x_{k-i+1}, \dots, x_k).$$

En vertu de la règle unimodulaire, on a que

$$f(k, i+1) = \frac{f(k-1, i)f(k, i) + (-1)^{i-1}}{f(k-1, i-1)}$$

qui, en vertu de l'hypothèse de récurrence et de la définition des polynômes continuants d'Euler, donne

$$\begin{aligned} f(k, i+1) &= \frac{p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1})p_i(x_{k-i+1}, \dots, x_k) + (-1)^{i-1}}{p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1})} \\ &= \frac{x_k p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1}) p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1})}{p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1})} \\ &\quad + \frac{p_{i-2}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-2}) p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + (-1)^{i-1}}{p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1})} \\ &= x_k p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + \frac{f(k-2, i-2)f(k-1, i) + (-1)^{i-1}}{f(k-1, i-1)}. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la règle unimodulaire, on obtient que

$$f(k, i+1) = x_k p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + f(k-1, i-1)$$



qui, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition des polynômes continuants d'Euler, donne

$$\begin{aligned} f(k, i+1) &= x_k p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + p_{i-1}(x_{k-i}, \dots, x_{k-2}) \\ &= p_{i+1}(x_{k-i}, \dots, x_k), \end{aligned}$$

d'où l'énoncé.  $\square$

**Corollaire 4.6.** *Les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = f(k-i+1, 1)f(k, i-1) + f(k, i-2) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3, \dots, n+2\}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la définition des polynômes continuants d'Euler à la proposition 4.5.  $\square$

*Remarque 4.7.* Les  $c$ -frises sont définies à partir d'une généralisation des polynômes continuants d'Euler dans [BRS13]. Cette définition permet de considérer les frises alternées avec zéros aussi bien que les frises alternées sans zéros.

**Corollaire 4.8.** *Les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k-1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k-2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k-i+1, 1) \end{vmatrix}.$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence d'ordre 2 sur  $i$ . Pour  $i = 1$ , l'énoncé est trivial. Pour  $i = 2$ , il suffit d'utiliser la règle unimodulaire pour montrer que

$$f(k, 1)f(k-1, 1) - f(k, 2)f(k, 0) = -1$$

et, puisque  $f(k, 0) = 1$ , on a bien que

$$f(k, 2) = \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 \\ 1 & f(k-1, 1) \end{vmatrix}.$$

On suppose alors l'énoncé vérifié pour un  $i \geq 2$  et pour  $i-1$ . En vertu du

corollaire 4.6, on a que

$$\begin{aligned}
 f(k, i+1) &= f(k-i, 1)f(k, i) + f(k, i-1) \\
 &= f(k-i, 1) \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k-1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k-2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k-i+1, 1) \end{vmatrix} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k-1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k-2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k-i+2, 1) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k-1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k-2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k-i, 1) \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

d'où l'énoncé.  $\square$

**Corollaire 4.9.** *Les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = f(k, 1)f(k-1, i-1) + f(k-2, i-2) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence d'ordre 2 sur  $i$ , en développant le déterminant du corollaire 4.8 selon la première colonne, puis selon la première ligne.  $\square$

**Lemme 4.10.** *Pour tout  $k$  et pour tout  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n+2\}$ , on a :*

$$a) \ f(k, 1) = \frac{f(k+i-1, i) - f(k+i-1, i-2)}{f(k+i-1, i-1)},$$

$$b) \ f(k, 1) = \frac{f(k, i) - f(k-2, i-2)}{f(k-1, i-1)}.$$

*Démonstration.* Pour la partie a), on utilise le corollaire 4.6, de sorte que

$$\begin{aligned}
 &\frac{f(k+i-1, i) - f(k+i-1, i-2)}{f(k+i-1, i-1)} \\
 &= \frac{f(k, 1)f(k+i-1, i-1) + f(k+i-1, i-2) - f(k+i-1, i-2)}{f(k+i-1, i-1)} \\
 &= f(k, 1).
 \end{aligned}$$

Le preuve de la partie b) est semblable et est omise.  $\square$

### 4.3 Périodicité des frises alternées

Le résultat suivant stipule qu'une frise alternée est toujours périodique. Pour le démontrer, il faut d'abord prouver les trois lemmes suivants.

**Lemme 4.11.** *Dans une frise alternée, les éléments de la première et de la dernière rangée (sans compter les rangées de 0 et de 1) sont liés entre eux de la manière suivante :*

$$f(2k + n + 1, n) = \begin{cases} f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

et

$$f(2k + n + 2, n) = \begin{cases} -f(2k + 1, 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k + 1, 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ f(2k + 1, 1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k + 1, 1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Démonstration.* En utilisant le lemme 4.10 a), on a que

$$f(2k, 1) = \frac{f(2k + n + 1, n + 2) - f(2k + n + 1, n)}{f(2k + n + 1, n + 1)}.$$

Or, puisque

$$f(2k + n + 1, n + 2) = 0$$

et

$$f(2k + n + 1, n + 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ ou si } n \equiv 3 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ou si } n \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

on a bien que

$$f(2k + n + 1, n) = \begin{cases} f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

La preuve est semblable pour  $f(2k + n + 2, n)$  et est omise.  $\square$

**Lemme 4.12.** *Dans une frise alternée, les éléments de la première et de la dernière rangée (sans compter les rangées de 0 et de 1) sont liés entre eux de la manière suivante :*

$$f(2k - 2, n) = \begin{cases} f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k, 1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

et

$$f(2k-1, n) = \begin{cases} -f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle du lemme 4.11, mais on utilise la partie b) du lemme 4.10, plutôt que la partie a).  $\square$

**Corollaire 4.13.** *Les éléments de la première rangée d'une frise (sans compter les 0 et les 1) sont tels que*

$$f(k+n+3, 1) = \begin{cases} -f(k, 1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(k, 1) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

*Démonstration.* L'énoncé découle directement des lemmes 4.11 et 4.12.  $\square$

**Théorème 4.14.** *Toute frise alternée est périodique et sa période est un diviseur de  $2n+6$ .*

*Démonstration.* Comme conséquence directe du corollaire 4.13, on trouve que

$$f(k+2n+6, 1) = f(k, 1) \text{ pour tout } k,$$

ce qui montre que la première rangée est périodique et que sa période est un diviseur de  $2n+6$ . La règle unimodulaire permet de montrer récursivement, en commençant par la deuxième rangée, que la frise en entier est périodique et que sa période est un diviseur de  $2n+6$ .  $\square$

**Proposition 4.15.** *Une frise alternée est entièrement déterminée par  $n+3$  éléments consécutifs sur la première rangée.*

*Démonstration.* Comme conséquence directe du corollaire 4.13, tous les éléments de la première rangée sont déterminés à partir de  $n+3$  éléments consécutifs. Les autres éléments sont déduits à partir du corollaire 4.8.  $\square$

**Corollaire 4.16.** *Une frise alternée est entièrement déterminée par  $n+3$  éléments consécutifs sur la dernière rangée.*

*Démonstration.* À partir du lemme 4.11,  $n+3$  éléments consécutifs de la première rangée sont déterminés à partir de  $n+3$  éléments consécutifs sur la dernière rangée. L'énoncé découle alors de la proposition 4.15.  $\square$



**Théorème 5.4.** *Une frise alternée est composée uniquement d'entiers si et seulement s'il existe une section diagonale de cette frise qui est telle que, pour tout  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n+2\}$ ,*

a)  $f(k_0, i) \in \mathbb{Z}_*$  et

b)  $f(k_0, i - 1) \mid (f(k_0, i) - f(k_0, i - 2))$ .

*Démonstration.* Comme conséquence directe du lemme 4.10 b), on a que  $f(k, 1) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $k \in \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k_0 + n + 1\}$ . À partir du corollaire 4.8, on déduit alors que  $f(k_0 + 1, n) \in \mathbb{Z}$  et, avec le lemme 4.11, on trouve que  $f(k_0 + n + 2, 1) \in \mathbb{Z}$ . À partir du corollaire 4.13, on a donc que  $f(k_0 + l, 1) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $l$ . Le corollaire 4.8 assure que tous les éléments de la frise sont des entiers. Cela montre la nécessité. La suffisance est triviale.  $\square$

## 6 Lien avec les frises de Conway et Coxeter

Comme mentionné auparavant, les frises de Conway et Coxeter (voir [CC73a, CC73b, FL10]) sont les frises monotones obtenues avec  $c = -1$ . Dans cette section, il est exposé en quoi elles sont liées aux frises alternées.

**Lemme 6.1.** *Pour chaque frise de Conway et Coxeter  $f^*$ , il existe une frise alternée  $f$  ayant le même domaine et telle que :*

$$f(k, i) = \begin{cases} & \text{si } i \equiv 0 \pmod{4} \\ f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \\ -f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ & \text{si } i \equiv 2 \pmod{4} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On réfère le lecteur au théorème 7.3 de [BRS13, p. 18].  $\square$

*Remarque 6.2.* Remarquez que les éléments de la frise de Conway et Coxeter et de sa frise alternée correspondante sont les mêmes, en valeur absolue.

**Théorème 6.3.** *Pour chaque frise d'entiers positifs de Conway et Coxeter  $f^*$ , il existe une frise alternée  $f$  d'entiers non nuls ayant le même domaine et telle que :*

$$f(k, i) = \begin{cases} & \text{si } i \equiv 0 \pmod{4} \\ f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \\ -f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ & \text{si } i \equiv 2 \pmod{4} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

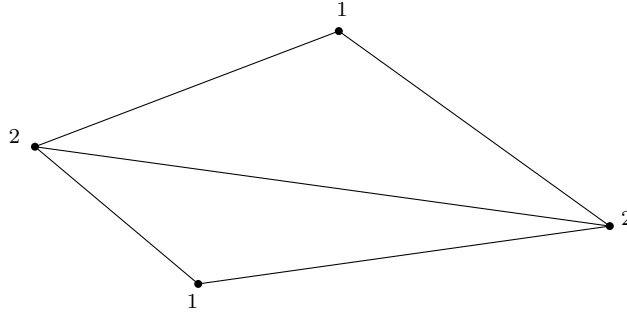
*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe du lemme 6.1 et de la remarque précédente.  $\square$

On rappelle au lecteur la définition de triangulation de polygone convexe (au sens de [CC73a, CC73b]).

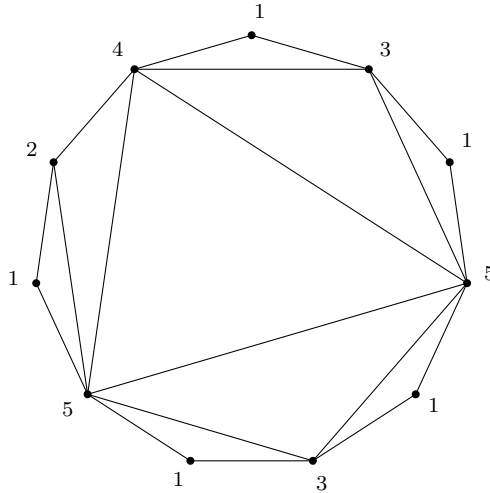
**Définition 6.4.** Soit  $P$  un polygone convexe à  $m \geq 4$  sommets. Une *triangulation* de  $P$  est un découpage de  $P$  en  $m - 2$  triangles par  $m - 3$  diagonales non sécantes (à l'intérieur du polygone).

*Remarque 6.5.* Soit  $S_0$  un sommet quelconque d'un polygone convexe  $P$  à  $m$  sommets et  $S_i$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ , les autres sommets de  $P$ , de sorte que  $S_i$  soit adjacent à  $S_{i-1}$  pour tout  $i$ . Dans une triangulation, on étiquette chaque sommet  $S_i$  par le nombre de triangles qui lui sont incidents. On note cette valeur  $\delta_i$ . Deux triangulations sont dites équivalentes s'il existe une numérotation adéquate de leurs sommets respectifs telle qu'elles admettent la même suite d'étiquettes  $(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{m-1})$ .

**Exemple 6.6.** L'unique triangulation du quadrilatère est étiquetée de la sorte :



**Exemple 6.7.** Une des triangulations de l'hendécagone est telle que :



Dans [CC73b, p. 180-181], il est montré que les frises de Conway et Coxeter d'entiers positifs d'ordre  $n$  sont en bijection avec les triangulations de polygones convexes à  $n + 3$  sommets. À partir du théorème 6.3, il est naturel d'étendre ce résultat aux frises alternées d'entiers non nuls.

**Théorème 6.8.** *Pour chaque triangulation de polygone convexe à  $n + 3$  sommets, il existe une frise alternée d'entiers non nuls d'ordre  $n$ , donnée par :*

$$\begin{cases} f(k,1) = \delta_k & \text{pour tout } k \text{ pair} \\ f(k,1) = -\delta_k & \text{pour tout } k \text{ impair,} \end{cases}$$

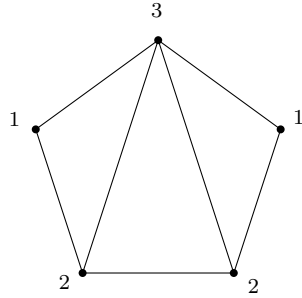
où  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n + 2\}$ .

*Démonstration.* La démonstration découle directement du théorème 6.3 et du résultat de Conway et Coxeter dans [CC73b, p. 180-181]. La frise résultante est uniquement déterminée, selon la proposition 4.15.  $\square$

*Remarque 6.9.* Les frises alternées construites à partir de triangulations de polygones respectent la condition du théorème 5.1 pour avoir une frise alternée d'éléments non nuls.

*Remarque 6.10.* Une triangulation de polygone convexe ayant un nombre impair de sommets n'aura qu'une seule frise alternée associée par le théorème 6.8, alors qu'une triangulation de polygone convexe ayant un nombre pair de sommets en aura deux.

**Exemple 6.11.** À partir de l'unique triangulation du pentagone,

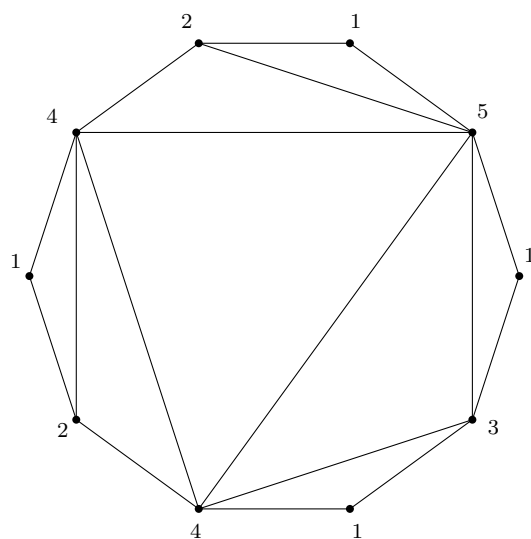


on peut obtenir la frise alternée suivante :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2 & -2 & 1 & \dots \\ & -2 & -1 & -3 & -1 & -2 & -2 & -1 & -3 & -1 & \\ & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

**Exemple 6.12.** À partir de la triangulation suivante du décagone :





on peut obtenir les deux frises alternées

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	-5	1	-3	1	-4	2	-1	4				
-1	-4	-4	-2	-2	-3	-7	-1	-3	-7				
	3	-3	7	-1	5	-5	3	-2	5				
...	8	2	5	3	2	8	2	5	3	2	...		
	5	-3	2	-5	3	-3	3	-7	1				
-3	-7	-1	-3	-7	-1	-4	-4	-2	-2				
	4	-2	1	-4	2	-1	5	-1	3				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

et

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	-1	5	-1	3	-1	4	-2	1	-4				
-1	-4	-4	-2	-2	-3	-7	-1	-3	-7				
	-3	3	-7	1	-5	5	-3	2	-5				
...	8	2	5	3	2	8	2	5	3	2	...		
	-5	3	-2	5	-3	3	-3	7	-1				
-3	-7	-1	-3	-7	-1	-4	-4	-2	-2				
	-4	2	-1	4	-2	1	-5	1	-3				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.

Les éléments de ces frises sont les mêmes, en valeur absolue.

## Références

- [ARS10] Ibrahim ASSEM, Christophe REUTENAUER et David SMITH : Friezes. *Adv. Math.*, 225(6):3134–3165, 2010.
- [ASS06] Ibrahim ASSEM, Daniel SIMSON et Andrzej SKOWROŃSKI : *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. London Math. Soc. Student Texts 65, 2006.
- [BRS13] Véronique BAZIER-MATTE, David RACICOT-DESLOGES et Tanna SÁNCHEZ : Friezes and Continuing Polynomials with Parameters. (en préparation), 2013.
- [CC73a] J. H. CONWAY et H. S. M. COXETER : Triangulated polygons and frieze patterns. *Math. Gaz.*, 57(400):87–94, 1973.
- [CC73b] J. H. CONWAY et H. S. M. COXETER : Triangulated polygons and frieze patterns. *Math. Gaz.*, 57(401):175–183, 1973.
- [Cha12] Myriam CHABOT : Fonctions de frises et algèbres amassées. *Revue CaMUS*, 2:78–93, 2012.
- [Cox71] H. S. M. COXETER : Frieze Patterns. *Acta Arith.*, 18:297–310, 1971.
- [FL10] Jean-Sébastien FRASER MARTINEAU et Dominique LAVERTU : Frises et triangulations de polygones. *Revue CaMUS*, 1:39–59, 2010.
- [FZ02] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529 (electronic), 2002.
- [FZ03] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1):63–121, 2003.

DAVID RACICOT-DESLOGES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: David.Racicot-Desloges@USherbrooke.ca

# Concepts de dépendance et copules

Myriam Chabot

**RÉSUMÉ** Cet article se veut une introduction à certaines notions de base du concept de dépendance dans le but d'effectuer une entrée en matière avec celui des copules. On y présentera quelques caractéristiques et propriétés fondamentales accompagnées d'exemples pour mieux illustrer les propos expliqués.

## 1 Introduction

Dans une panoplie de domaines de recherche comme la médecine, la finance et la biologie, des chercheurs s'évertuent constamment à comprendre les structures de dépendance entre deux ou plusieurs variables, relations décrites par les fonctions de distribution conjointe. Cependant, déterminer la loi conjointe peut constituer une tâche assez fastidieuse.

Pour l'estimer, certains pourraient être tentés d'utiliser les lois marginales des variables dont il est question. Étant la plupart du temps connues ou supposées connues, celles-ci sont généralement plus facilement mesurables, car une seule dimension doit être considérée : il est plus difficile de faire des hypothèses sur le comportement conjoint de plusieurs variables. En effet, il est possible de s'en servir dans certaines situations. Par exemple, si l'indépendance entre  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est assurée, alors la fonction de densité conjointe de ces  $n$  variables s'exprime de la manière suivante :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times \dots \times f_n(x_n),$$

où  $f_i(\cdot)$  est la fonction de densité univariée de la  $i^e$  variable aléatoire. Par contre, il n'en demeure pas moins qu'établir l'indépendance entre des variables n'est pas nécessairement simple, car, bien qu'elle implique un coefficient de corrélation nul, la réciproque se montre généralement fausse. Une question naturelle se pose : « Quel rôle la dépendance joue-t-elle dans la modélisation statistique ? » Un simple exemple suffit pour se convaincre de l'insuffisance de l'information contenue dans les lois marginales pour résumer le comportement conjoint des

---

J'aimerais remercier M. Taoufik Bouezmarni, professeur à l'Université de Sherbrooke, pour la supervision de cet article rédigé à la suite du cours d'initiation à la recherche suivi en automne 2012. Je voudrais également remercier M. Éric Marchand, professeur à l'Université de Sherbrooke, pour les commentaires apportés lors de la révision de l'article, Félix Camirand-Lemyre, étudiant au doctorat, pour l'aide apportée à la rédaction et la correction de l'article, de même que Charles Fontaine, également étudiant au doctorat, pour l'aide informatique fournie.

variables entre elles. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires ayant toutes deux comme distribution marginale  $\text{bêta}(2,2)$ . Avec ces hypothèses de départ, on effectue deux simulations de 2000 données chacune et on obtient les deux graphiques présentés à la figure 1.

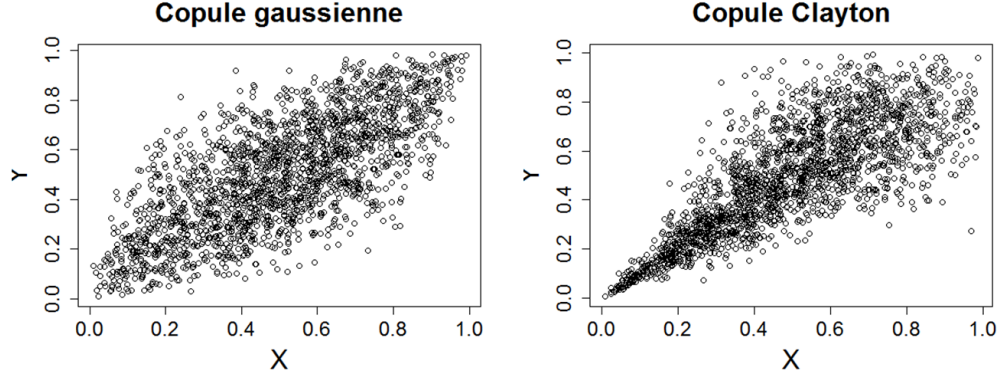


FIGURE 1 – Simulation de données pour comparer le comportement conjoint de deux variables aléatoires ayant chacune comme distribution marginale  $\text{bêta}(2,2)$

On peut alors constater que, malgré le fait que  $X$  et  $Y$  soient de même distribution marginale dans chacune des simulations, la structure de dépendance entre ces deux variables est bien différente. En effet, dans le graphique de gauche, la concentration du nuage de points est plus prononcée pour de grandes valeurs de  $X$ , ce qui confère une meilleure prédiction des valeurs de  $Y$  lorsque l'on connaît de telles valeurs de  $X$ . C'est plutôt le cas pour les petites valeurs de  $X$  dans le graphique de droite. On verra plus tard que la première simulation sera associée à une copule gaussienne, alors que la deuxième sera associée à une copule Clayton.

Les copules constituent un sujet de recherche relativement moderne étant en plein essor depuis principalement les trois dernières décennies. Provenant du nom latin *copula*, qui signifie « *tout ce qui sert à attacher, lien, chaîne* » [Gaf13], la copule est un outil statistique qui modélise la dépendance entre des variables aléatoires, permettant ainsi de considérer de manière distincte la structure de dépendance décrite par la fonction de distribution conjointe et le comportement marginal des variables considérées. En effet, soit un couple de  $n$  variables aléatoires  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  tel que, pour  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , la fonction de répartition conjointe est donnée par

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

et la fonction de répartition marginale de la  $i^{\text{e}}$  variable aléatoire, pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , est donnée par

$$F_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i).$$

Le célèbre théorème de Sklar [Skl59], qui sera davantage étudié plus loin dans l'article, stipule que si les fonctions  $F_i(\cdot)$  sont continues, alors il existe une unique

fonction de répartition multivariée  $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ , que l'on appellera copule, dont les marges sont uniformes et telle que, pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on puisse écrire

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\}.$$

Autrement dit, il est possible d'associer la loi conjointe multivariée aux lois marginales univariées à l'aide de la fonction copule qui contient l'information nécessaire sur la structure de dépendance des variables aléatoires entre elles.

Bien que le terme *copule* fut utilisé comme objet mathématique pour la première fois en 1959 dans les travaux d'Abe Sklar, mathématicien américain et professeur émérite à l'*Illinois Institute of Technology*, la fonction sous-jacente fut étudiée bien avant, sous d'autres appellations, par exemple dans les travaux de Fréchet [Fré51], de Féron [Fé56] et de plusieurs autres mathématiciens et statisticiens qui s'intéressaient aux fonctions de distribution multivariée ayant des lois marginales fixées [Nel06].

On retrouve notamment plusieurs résultats à la base de la théorie des copules dans des travaux de Wassily Hoeffding dans [Hoe40] et [Hoe41] (voir également [Nel06]). Dans ceux-ci, ce statisticien et probabiliste finnois décrivait des fonctions de distribution standardisée bivariée dont le domaine est le carré  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$  et dont les marges sont uniformes sur l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ . Il travailla également sur les mesures de dépendance invariantes sous transformations strictement croissantes. Malgré l'apport notable de ses travaux, ces derniers ne furent pas immédiatement considérés à leur juste valeur notamment en raison de circonstances historiques (Deuxième Guerre mondiale). D'ailleurs, Fréchet arriva à des conclusions semblables à celles obtenues par Hoeffding malgré le fait qu'elles lui étaient inconnues [Fré51]. De ce fait, aujourd'hui, lorsque l'on fait référence à certains résultats de ce domaine dans la littérature, notamment concernant l'ordre stochastique, il n'est pas rare de trouver ces deux noms juxtaposés. Puis, en 1959, Sklar écrivit un article en utilisant pour la première fois le mot « copule » avec le sens qu'on lui connaît à ce jour (voir [Skl59]), alors qu'il travaillait avec Berthold Schweizer sur la théorie des espaces métriques probabilistes. Pour plus de détails, on réfère le lecteur à [Nel06].

Cet article se veut une introduction à la notion de copules. Pour ce faire, nous commençons par présenter certaines propriétés de base importantes lorsque nous parlons de dépendance entre variables aléatoires. Ceci nous permet ensuite d'explorer les rudiments des copules, pour alors en arriver au théorème de Sklar. Finalement, nous donnons quelques exemples de copules accompagnés de leurs caractéristiques principales.

## 2 Dépendance

Puisqu'il s'agit d'un article davantage dédié aux copules, nous n'explorerons pas de manière exhaustive tous les concepts de la littérature liés à la notion de dépendance. Il importe toutefois d'en présenter l'essentiel pour mieux comprendre

ce que constituent les copules. Pour des fins de simplification et afin de favoriser de meilleures compréhension et visualisation des notions, nous nous restreignons à l'étude du cas bivarié, où seules deux variables aléatoires  $(X_1, X_2)$  sont en relation, bien que la plupart des résultats qui sont présentés se généralisent dans le cas multidimensionnel.

Une notion qui revient tout au long de l'article est celle d'une fonction de répartition bivariée, parfois appelée fonction de distribution cumulative bivariée. Celle-ci peut être définie de deux manières. D'une part, on a

$$F(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2). \quad (1)$$

D'autre part, contrairement à cette définition qui fait appel aux variables aléatoires, on peut énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit une fonction de répartition bivariée [Joe01].

**Définition 2.1.** Une fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  continue à droite est dite une *fonction de répartition bivariée* si et seulement si :

- 1)  $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ , pour  $i \in \{0, 1\}$  ;
- 2)  $\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = 1$  ;
- 3) (*Inégalité du rectangle*) pour tout  $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\alpha_1 < \beta_1$  et  $\alpha_2 < \beta_2$ , on a

$$F(\alpha_1, \alpha_2) + F(\beta_1, \beta_2) - F(\alpha_1, \beta_2) - F(\beta_1, \alpha_2) \geq 0. \quad (2)$$

Une fonction quelconque  $F$  satisfaisant l'équation (2) sera dite *2-croissante*. Par contre, malgré ce que peut laisser sous-entendre l'appellation, si  $F$  est croissante par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ , elle ne sera pas nécessairement 2-croissante. La réciproque sera vraie si la condition 1 de la définition précédente est également respectée. Cette dualité entre les approches probabiliste et fonctionnelle de la définition d'une fonction de répartition bivariée est également présente dans la définition de la copule.

*Notation 2.2.* On désignera par  $\mathcal{C}(F_1, F_2)$  la classe des fonctions de répartition bivariées de marginales  $F_1$  et  $F_2$ .

*Remarque 2.3.* Les marginales s'obtiennent de la fonction de distribution :

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2); \quad (3.a)$$

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2). \quad (3.b)$$

**Définition 2.4.** La *fonction de survie*  $\bar{F}$  associée à une fonction de répartition cumulative bivariée  $F$  correspond à

$$\bar{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2). \quad (4)$$

Cette dernière peut également s'écrire en fonction de  $F$ ,  $F_1$  et  $F_2$  :

$$\bar{F}(x_1, x_2) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2). \quad (5)$$

## 2.1 Ordre à dépendance positive bivariable

Dans certaines familles paramétriques de distribution multidimensionnelle, nous remarquons que la valeur du ou des paramètres influence la force de la dépendance [Joe01]. En s'inspirant de ce fait, nous pouvons comparer les fonctions de répartition multivariées entre elles et, ainsi, établir un ordre partiel, car relatif aux fonctions comparées, permettant de déterminer si une fonction de répartition cumulative est plus dépendante qu'une autre. La comparaison peut également s'exprimer en termes d'un couple de variables aléatoires.

*Notation 2.5.* Pour parler de convergence en distribution ou en loi, on utilisera le symbole  $\xrightarrow{d}$ .

**Définition 2.6.** Soient  $F, G, H \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$  trois fonctions de répartition bivariables. Soient  $(X_1, X_2)$  et  $(X'_1, X'_2)$  deux couples de variables aléatoires telles que  $X_1$  et  $X'_1$  ont la même distribution marginale, tout comme  $X_2$  et  $X'_2$ . Un ordre est dit à *dépendance positive bivariable*, noté  $\prec$ , s'il satisfait les conditions suivantes :

- 1) (*Concordance*)  $F \prec G \implies F(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2)$ , pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ;
- 2) (*Réflexivité*)  $F \prec F$ ;
- 3) (*Symétrie*)  $F \prec G$  et  $G \prec F \implies F = G$ ;
- 4) (*Transitivité*)  $F \prec G$  et  $G \prec H \implies F \prec H$ ;
- 5) (*Bornes*)  $\max\{0, F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1\} \prec F \prec \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$ ;
- 6) (*Invariance à la limite distributionnelle*)  $F_n \prec G_n$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ),  $F_n \xrightarrow{d} F$  et  $G_n \xrightarrow{d} G \implies F \prec G$ ;
- 7) (*Invariance à l'ordre des indices*)  $(X_1, X_2) \prec (X'_1, X'_2) \implies (X_2, X_1) \prec (X'_2, X'_1)$ ;
- 8) (*Invariance aux transformations croissantes*) Soit  $a$  une fonction strictement croissante.  $(X_1, X_2) \prec (X'_1, X'_2) \implies (a(X_1), X_2) \prec (a(X'_1), X'_2)$ ;
- 9) (*Invariance aux transformations décroissantes*) Soit  $b$  une fonction strictement décroissante.  $(X_1, X_2) \prec (X'_1, X'_2) \implies (b(X_1), X_2) \prec (b(X'_1), X'_2)$ .

*Remarque 2.7.* Les conditions 2) à 4) impliquent que «  $\prec$  » est une relation d'équivalence.

La première condition, la concordance, se base sur un concept de dépendance important qui n'a pas encore été abordé, soit la dépendance de quadrant.

**Définition 2.8.** Soit  $X = (X_1, X_2)$  un couple de variables aléatoires de fonction de répartition  $F$ . Le vecteur  $X$  (ou la fonction  $F$ ) est dit *de dépendance de quadrant positive* si

$$\mathbb{P}(X_1 > \alpha_1, X_2 > \alpha_2) \geq \mathbb{P}(X_1 > \alpha_1)\mathbb{P}(X_2 > \alpha_2), \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

*Remarque 2.9.* En réécrivant l'inégalité (6) en utilisant la fonction de survie, on obtient

$$\bar{F}(\alpha_1, \alpha_2) \geq \bar{F}_1(\alpha_1)\bar{F}_2(\alpha_2), \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

On peut montrer assez facilement que cette dernière est équivalente à

$$F(\alpha_1, \alpha_2) \geq F_1(\alpha_1)F_2(\alpha_2), \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

La preuve est laissée en exercice.

Ici, nous parlons de dépendance *positive*, car si  $X'_1$  et  $X'_2$  sont des variables aléatoires indépendantes de même distribution marginale que  $X_1$  et  $X_2$ , respectivement, alors  $X_1$  et  $X_2$  sont plus enclines à prendre simultanément de grandes valeurs, ou encore simultanément de petites valeurs, par rapport à  $X'_1$  et  $X'_2$ . De façon analogue, nous pouvons définir la *dépendance de quadrant négative* en inversant le symbole des inégalités (6) à (8).

Du concept de dépendance de quadrant découle un cas particulier d'ordre à dépendance positive bivariable, l'ordre de concordance, que l'on note  $\prec_c$ .

**Définition 2.10.** Soient  $F, G \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$  deux fonctions de répartition bivariables. On dit que  $G$  est *plus concordant* que  $F$ , noté  $F \prec_c G$ , si

$$F(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2), \text{ pour tout } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

*Remarque 2.11.* De la définition 2.4, celle-ci peut également s'écrire :

$$\bar{F}(x_1, x_2) \leq \bar{G}(x_1, x_2), \text{ pour tout } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Cette définition met en lumière le fait qu'il s'agit de l'ordre à dépendance positive bivariable le plus faible : si  $F \prec G$  pour un ordre à dépendance positive bivariable quelconque, alors  $F \prec_c G$ . On peut alors remarquer que cela constitue la première condition de la définition 2.6.

Le terme *concordant* suggère que si  $(X_1, X_2) \sim F$  et que  $(X'_1, X'_2) \sim G$ , alors  $X'_1$  et  $X'_2$  sont plus sujettes à prendre simultanément de petites valeurs ou de grandes valeurs que  $X_1$  et  $X_2$ . Alors que pour la dépendance de quadrant on comparait un vecteur de variables quelconques à un vecteur de variables indépendantes, la concordance est plutôt une propriété se basant sur la comparaison de vecteurs de variables aléatoires quelconques pour qualifier la dépendance d'une distribution par rapport à une autre.

**Exemple 2.12.** Parmi les distributions  $F \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$ ,

- a) la distribution la plus concordante est la *borne supérieure de Fréchet* :

$$F_U(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\};$$

- b) la distribution la plus discordante est la *borne inférieure de Fréchet* :

$$F_L(x_1, x_2) = \max\{0, F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1\}.$$

Il s'agit des bornes de la condition 5) de la définition 2.6.



## 2.2 Mesures d'association

Une des premières mesures de dépendance introduite dans l'étude des statistiques est probablement le coefficient de corrélation de Pearson, une mesure de dépendance linéaire entre deux variables aléatoires quantitatives. Par contre, lorsque nous travaillons avec des variables aléatoires continues non normales, l'utilisation de notions basées sur la linéarité n'est pas toujours appropriée. De plus, contrairement au coefficient de corrélation de Pearson, certaines mesures sont invariantes sous transformations strictement croissantes et valent 1 pour la borne supérieure de Fréchet et -1 pour la borne inférieure de Fréchet, ce qui, en ce sens, les rendent plus intéressantes. C'est le cas entre autres du tau de Kendall  $\tau$  et du rho de Spearman  $\rho_S$ , deux mesures d'association bivariées qui *mesurent* la concordance.

**Définition 2.13.** Soient  $(X_1, X_2)$  et  $(X'_1, X'_2)$  deux paires indépendantes de variables aléatoires de distribution continue  $F \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$ . Le *tau de Kendall* se définit comme suit :

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0]. \quad (9.a)$$

Autrement dit, il s'agit de la probabilité de concordance entre  $(X_1, X_2)$  et  $(X'_1, X'_2)$  à laquelle nous soustrayons celle de discordance, que l'on peut également réécrire de la manière suivante :

$$\tau = 2\mathbb{P}[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0] - 1. \quad (9.b)$$

La proposition qui suit montre comment on peut exprimer le tau de Kendall en fonction de la fonction de répartition conjointe  $F$ .

**Proposition 2.14.** Soient  $(X_1, X_2)$  et  $(X'_1, X'_2)$  deux paires indépendantes de variables aléatoires de distribution continue  $F \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$ . Alors, on a

$$\tau = 4 \int F dF - 1. \quad (9.c)$$

*Démonstration.* (Cette démonstration est basée sur la démonstration du théorème 5.1.1 de [Nel06].) On a  $\mathbb{P}[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0] = \mathbb{P}(X_1 > X'_1, X_2 > X'_2) + \mathbb{P}(X_1 < X'_1, X_2 < X'_2)$ , des probabilités qui sont évaluées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < X'_1, X_2 < X'_2) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) dF(x_1, x_2) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} F(x_1, x_2) dF(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > X'_1, X_2 > X'_2) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) dF(x_1, x_2) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{F}(x_1, x_2) dF(x_1, x_2) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} (1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2)) dF(x_1, x_2) \\
&= 1 - \iint_{\mathbb{R}^2} F_1(x_1) dF(x_1, x_2) - \iint_{\mathbb{R}^2} F_2(x_2) dF(x_1, x_2) \\
&\quad + \iint_{\mathbb{R}^2} F(x_1, x_2) dF(x_1, x_2) \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{\mathbb{R}^2} F(x_1, x_2) dF(x_1, x_2) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} F(x_1, x_2) dF(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité est obtenue puisque  $F_1(X_1), F_2(X_2) \sim U(0,1)$  et donc l'espérance vaut  $1/2$ . Le résultat suit de l'équation (9.b).  $\square$

Comme le tau de Kendall, le rhô de Spearman est également basé sur la concordance et la discordance.

**Définition 2.15.** Soient  $(X_1, X_2)$ ,  $(X'_1, X'_2)$  et  $(X''_1, X''_2)$  trois paires indépendantes de variables aléatoires de distribution continue  $F \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$ . Le *rhô de Spearman* se définit comme suit :

$$\rho_S = 3\mathbb{P}[(X_1 - X'_1)(X_2 - X''_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X'_1)(X_2 - X''_2) < 0]. \quad (10.a)$$

L'équation (10.a) peut facilement se réécrire comme

$$\rho_S = 6\mathbb{P}[(X_1 - X'_1)(X_2 - X''_2) > 0] - 3. \quad (10.b)$$

**Exercice 2.16.** Montrer que le rhô de Spearman peut également s'écrire de la manière suivante :

$$\rho_S = 12 \iint F_1(x_1) F_2(x_2) dF(x_1, x_2) - 3. \quad (10.c)$$

Une fois les copules introduites, nous verrons comment écrire ces mesures uniquement à l'aide de celles-ci. Bien que les valeurs du tau de Kendall et du rhô de Spearman se situent entre -1 et 1, la connaissance de l'une permet d'avoir une bonne idée sur celle de l'autre grâce aux inégalités du théorème suivant.

**Théorème 2.17. (Théorèmes 5.1.10 et 5.1.11 de [Nel06])** On a

$$|3\tau - 2\rho| \leq 1$$

ainsi que

$$\frac{1 + \rho_S}{2} \geq \left(\frac{1 + \tau}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \rho_S}{2} \geq \left(\frac{1 - \tau}{2}\right)^2.$$

En isolant  $\rho_S$  dans chacune des inégalités du théorème 2.17 et en combinant les résultats, on obtient le corollaire qui suit.

**Corollaire 2.18.** *Selon le signe de  $\tau$ , nous avons*

$$\begin{cases} \frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2} & \text{si } \tau \geq 0 \\ \frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1 + 3\tau}{2} & \text{si } \tau \leq 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour toute paire de variables aléatoires continues  $(X_1, X_2)$ , les valeurs de  $\tau$  et  $\rho_S$  doivent se situer dans la région ombragée de la figure 2.

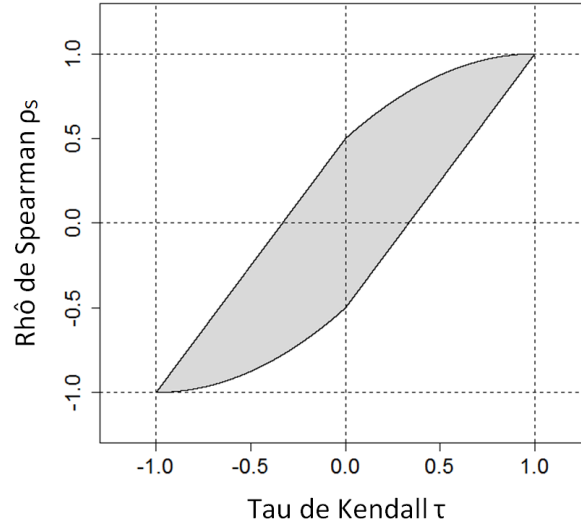


FIGURE 2 – Région contenant les valeurs de  $\tau$  et de  $\rho_S$ , l'une en fonction de l'autre

Jusqu'à présent, les concepts de dépendance et les mesures présentés servaient à décrire comment les valeurs extrêmes d'une variable aléatoire se comportent avec celles d'une autre. Dans un autre ordre d'idées, la dépendance de queue se rapporte plutôt à la dépendance des quadrants inférieur gauche et supérieur droit d'une distribution bivariée, ce qui permet de décrire la dépendance de valeurs extrêmes (qui se rapportent principalement aux queues d'une distribution). Le paramètre utilisé pour une telle mesure sera  $\lambda$ . Pour ce faire, nous avons besoin des inverses des fonctions marginales. Par contre, si ces dernières ne sont pas strictement croissantes, nous devons utiliser le *quasi-inverse*, car la fonction inverse ne sera pas correctement définie.

**Définition 2.19.** Soit  $F$  une fonction de répartition. Le *quasi-inverse*  $F^{(-1)} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $F$  est une fonction définie comme suit :

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\}. \quad (11)$$

*Remarque 2.20.* Si  $F$  est strictement croissante, alors le quasi-inverse correspond à l'inverse usuel de  $F$ , que nous noterons  $F^{-1}$ .

**Définition 2.21.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires de fonction de répartition univariée respective  $F_1$  et  $F_2$ . Si les limites existent, un paramètre permettant de mesurer la dépendance de queue à droite est

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{(-1)}(t) | X_1 > F_1^{(-1)}(t)] \quad (12)$$

et un permettant de mesurer la dépendance de queue à gauche est

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{(-1)}(t) | X_1 \leq F_1^{(-1)}(t)]. \quad (13)$$

On verra dans la prochaine section qu'il est également possible d'écrire ces mesures en termes de la copule sous-jacente, là où l'interprétation sera plus facile.

**Exercice 2.22.** Soient  $F, G \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$  deux fonctions de répartition bivariée. Montrer que  $F \prec_c G$  implique que (i)  $\tau(F) \leq \tau(G)$ , (ii)  $\rho_S(F) \leq \rho_S(G)$  et (iii)  $\lambda(F) \leq \lambda(G)$ .

### 3 Copules

Nous voici rendus au sujet principal de cet article : les copules. Celles-ci permettent de résumer la structure de dépendance d'une distribution conjointe en la séparant des comportements marginaux. Dans cette section, nous formalisons ce concept en donnant une définition précise, en énonçant le fameux théorème de Sklar ainsi qu'en présentant quelques propriétés et résultats.

#### 3.1 Éléments de base

*Notation 3.1.* Posons  $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ . Ainsi,  $I^2$  fera référence au carré unitaire  $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ .

Puisque la distribution uniforme est intimement liée aux copules, rappelons la fonction de répartition univariée d'une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $I$ . Soit  $U \sim U(0,1)$ . Alors, on a

$$\mathbb{P}(U \leq u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

**Définition 3.2.** Une *copule bivariée* est une fonction  $C : I^2 \rightarrow I$  qui est définie par les conditions suivantes :

- 1)  $C$  est attachée<sup>1</sup>, c'est-à-dire

$$C(u,0) = 0 = C(0,v), \text{ pour tout } u,v \in I; \quad (15.a)$$

---

<sup>1</sup>De l'anglais « grounded ».

2) Les marges sont uniformes, c'est-à-dire

$$C(u,1) = u \text{ et } C(1,v) = v, \text{ pour tout } u,v \in I; \quad (15.b)$$

3)  $C$  est une fonction 2-croissante sur  $I^2$ , c'est-à-dire pour tout  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$  tels que  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$ , on a

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (15.c)$$

En ramenant la normalisation de distributions que Hoeffding avait faite sur la région  $I^2$  plutôt que sur  $[-1/2, 1/2]^2$ , cela l'aurait conduit à la découverte des copules [Nel06].

En comparant la définition de copules avec celle d'une fonction de répartition bivariable, nous constatons qu'il s'agit d'une restriction de cette dernière en limitant le domaine à  $I^2$  et en exigeant que les marges soient uniformes. Ainsi, de nombreux parallèles peuvent être effectués avec plusieurs notions de dépendance présentées dans la section précédente.

Par exemple, il est possible de déterminer les copules extrêmes, soient les bornes de Fréchet. Posons  $C^-(u,v) = \max(0, u + v - 1)$  et  $C^+(u,v) = \min(u,v)$  (à comparer avec l'exemple 2.12).

**Théorème 3.3.** *Soit  $C$  une copule. Alors, pour tout  $(u,v) \in I^2$ , on a*

$$C^-(u,v) \leq C(u,v) \leq C^+(u,v). \quad (16)$$

*Démonstration.* Soit  $(u,v) \in I^2$ . Puisque  $C(u,v) \leq C(u,1) = u$  et  $C(u,v) \leq C(1,v) = v$ , alors  $C(u,v) \leq \min(u,v) = C^+(u,v)$ , d'où la deuxième inégalité. Pour démontrer la première inégalité, nous utilisons le fait que  $C(u,v) \geq 0$  et l'inégalité (15.c) :

$$\begin{aligned} C(1,1) - C(1,v) - C(u,1) + C(u,v) &\geq 0 \implies 1 - v - u + C(u,v) \geq 0 \\ &\implies C(u,v) \geq u + v - 1 \\ &\implies C(u,v) \geq \max(0, u + v - 1) \\ &\implies C(u,v) \geq C^-(u,v), \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

La figure 3 illustre les copules extrêmes. Ainsi, de la définition et du fait qu'une copule est uniformément continue sur son domaine (théorème 2.2.4. de [Nel06]), le graphique de toute copule  $C$  est un quadrilatère de surface continue compris dans le cube unitaire  $I^3$ , limité par les copules extrêmes et ayant pour sommets les points  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  et  $(1,1,1)$ .

Une autre manière de représenter graphiquement une copule est en utilisant les courbes de niveau, où une courbe est déterminée par l'ensemble des points  $(u,v) \in I^2$  tels que  $C(u,v) = t$  pour un certain  $t \in I$ . En se basant sur celles des bornes de Fréchet présentées à la figure 4, nous pouvons déduire que, pour toute copule  $C$ , sa courbe de niveau pour un certain  $t_0 \in I$  doit se trouver dans la région ombragée de la figure 5.

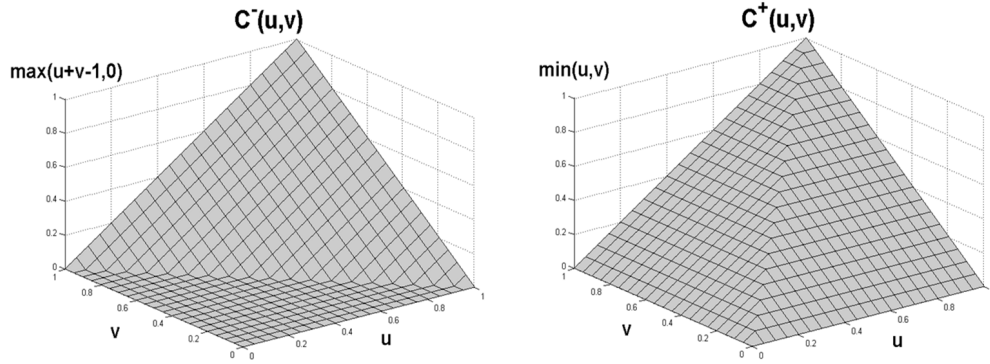


FIGURE 3 – Graphique des copules extrêmes

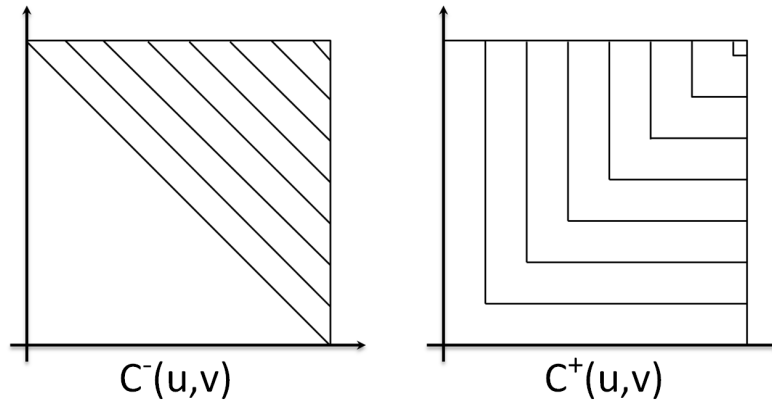


FIGURE 4 – Courbes de niveau des copules extrêmes

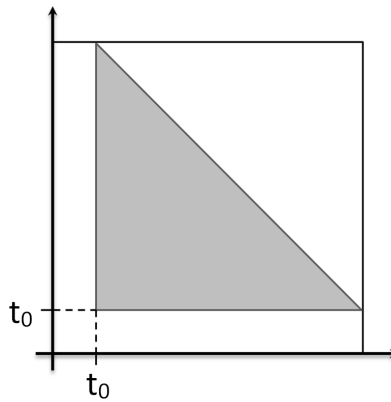


FIGURE 5 – Région contenant la courbe de niveau  $C(u,v) = t_0$  d'une certaine copule  $C$

### 3.2 Théorème de Sklar

De la définition 3.2, il est possible de construire une copule en s'assurant que les trois conditions de la définition soient respectées. Une autre manière consiste à utiliser la fonction de répartition bidimensionnelle. Le théorème de Sklar met en lumière comment il est possible de relier le principe de la copule à la fonction de répartition bivariée et aux lois marginales.

**Théorème 3.4.** (*Théorème 2.3.3 de [Nel06]*) Soit  $F$  une fonction de répartition conjointe de marges  $F_1$  et  $F_2$ . Alors, il existe une copule  $C : I^2 \rightarrow I$  telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)). \quad (17)$$

De plus, si  $F_1$  et  $F_2$  sont continues, alors  $C$  est unique.  $\square$

L'équation (17) permet d'exprimer une fonction de répartition bivariée  $F$  à l'aide d'une copule et de lois marginales  $F_1$  et  $F_2$ . À l'inverse, il est également possible d'exprimer une copule à partir de  $F$  et des inverses (ou quasi-inverses) des fonctions de répartition marginales.

**Corollaire 3.5.** Soit  $F$  une fonction de répartition conjointe de marges continues  $F_1$  et  $F_2$  et  $C$  la copule associée à  $F$ . Alors, pour  $(u, v) \in I^2$ , on a

$$\begin{aligned} C(u, v) &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &= F(F_1^{(-1)}(u), F_2^{(-1)}(v)). \end{aligned} \quad (18)$$

Ainsi, du corollaire 3.5, nous avons une formule de départ pour construire une copule bivariée à partir d'une fonction de distribution conjointe et de lois marginales.

**Exemple 3.6.** Soit la distribution logistique bivariée de Gumbel [Gum61] dont la fonction de répartition conjointe est donnée par

$$F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} + e^{-x_2})^{-1}, \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Des équations (3.a) et (3.b), nous obtenons les fonctions de distribution marginales  $F_1(x_1) = (1 + e^{-x_1})^{-1}$  et  $F_2(x_2) = (1 + e^{-x_2})^{-1}$ . Comme les fonctions inverses sont respectivement  $F_1^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right)$  et  $F_2^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right)$ , en se basant sur l'équation (18), la copule associée à  $F(x_1, x_2)$  s'écrit

$$\begin{aligned} C(u, v) &= F(F_1^{(-1)}(u), F_2^{(-1)}(v)) \\ &= \left[ 1 + e^{\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right)} + e^{\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right)} \right]^{-1} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv}. \end{aligned}$$

### 3.3 Propriétés

Cette section met en lumière quelques propriétés importantes de la théorie des copules. Un des aspects qui font des copules un outil statistique avantageux relève de leur caractère prévisible lorsque sont appliquées aux variables aléatoires des transformations strictement monotones.

*Notation 3.7.* Pour préciser que la copule  $C$  est associée aux variables  $X_1$  et  $X_2$ , nous la noterons  $C_{X_1, X_2}$ .

**Théorème 3.8.** *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires continues ayant pour copule  $C_{X_1, X_2}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux fonctions strictement croissantes, alors  $C_{X_1, X_2} = C_{\alpha(X_1), \beta(X_2)}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux fonctions strictement croissantes et  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires continues ayant pour copule  $C_{X_1, X_2}(u, v) = F(x_1, x_2)$  et pour fonctions de répartition marginales respectivement  $F_1$  et  $F_2$ . Notons les fonctions de distribution univariées de  $\alpha(X_1)$  et  $\beta(X_2)$  respectivement  $G_1$  et  $G_2$  et la loi conjointe  $G$ . Puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement croissantes et que  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables aléatoires continues, pour tout  $(u, v) \in \mathbb{I}^2$ , on a

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha(X_1), \beta(X_2)}(u, v) &= C_{\alpha(X_1), \beta(X_2)}(G_1(x_1), G_2(x_2)) \\
 &= G(x_1, x_2) \\
 &= \mathbb{P}(\alpha(X_1) \leq x_1, \beta(X_2) \leq x_2) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 \leq \alpha^{-1}(x_1), X_2 \leq \beta^{-1}(x_2)) \\
 &= F(\alpha^{-1}(x_1), \beta^{-1}(x_2)) \\
 &= C_{X_1, X_2}(F_1(\alpha^{-1}(x_1)), F_2(\beta^{-1}(x_2))) \\
 &= C_{X_1, X_2}(G_1(x_1), G_2(x_2)). \quad \square
 \end{aligned}$$

Dans la littérature des copules, ce théorème est connu comme étant le théorème d'invariance sous transformations strictement croissantes. Bien que l'invariance soit assurée seulement pour une croissance stricte des deux fonctions appliquées, il existe un résultat dans le cas où  $\alpha$  ou  $\beta$  sont plutôt décroissantes, le comportement de la copule étant ainsi prévisible (voir théorème 2.4.4 de [Nel06]). Comme le tau de Kendall  $\tau$  et le rhô de Spearman  $\rho_S$  sont invariants aux transformations strictement croissantes (la preuve est laissée en exercice), à la définition présentée dans la section 2.2 s'ajoute celle en termes de copules, où  $C$  est la copule associée  $F$  :

$$\tau_C = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (19.a)$$

$$= 4E(C(U, V)) - 1 \quad (19.b)$$

et

$$\rho_{SC} = 12 \iint_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v) - 3. \quad (20)$$



Un autre concept de dépendance qui a été abordé précédemment est celui de la dépendance de queue, qui, rappelons-le, mesure la probabilité que des valeurs extrêmes se réalisent simultanément. Tout comme  $\tau$  et  $\rho_S$ ,  $\lambda_L$  et  $\lambda_U$  peuvent s'écrire en termes de copules. Comme la définition de ces deux derniers paramètres se base sur des probabilités conditionnelles, le lemme suivant les mettra en relation avec les copules, ce qui facilitera la démonstration du théorème 3.10.

**Lemme 3.9.** *Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires uniformes sur  $I$ , et  $C$  la copule associée. Pour  $u, v \in I$ , on a*

$$\mathbb{P}(U \leq u \mid V \leq v) = \frac{C(u, v)}{v} \text{ et } \mathbb{P}(U > u \mid V > v) = \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - v}.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U \leq u \mid V \leq v) &= \frac{\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)}{\mathbb{P}(V \leq v)} = \frac{C(u, v)}{v} \\ \text{et } \mathbb{P}(U > u \mid V > v) &= \frac{\mathbb{P}(U > u, V > v)}{\mathbb{P}(V > v)} \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}(U \leq u) - \mathbb{P}(V \leq v) + \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)}{1 - \mathbb{P}(V \leq v)} \\ &= \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - v}. \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 3.10.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies comme dans la définition 2.21. Si les limites des équations (12) et (13) existent, alors*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \text{ et } \lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{(-1)}(u) \mid X_1 > F_1^{(-1)}(u)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[F_2(X_2) > u \mid F_1(X_1) > u] \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - u - u + C(u, u)}{1 - u} \\ &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \\ \text{et } \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{(-1)}(u) \mid X_1 \leq F_1^{(-1)}(u)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[F_2(X_2) \leq u \mid F_1(X_1) \leq u] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}. \quad \square \end{aligned}$$

La valeur de ces paramètres de dépendance de queue se situe toujours dans l'intervalle  $I$ . Selon celle-ci, on dira qu'une copule  $C$  possède ou non une dépendance de queue à gauche ou à droite.

**Définition 3.11.** Soit une copule  $C$ .

- a) Si  $\lambda_U$  existe et que sa valeur est comprise dans l'intervalle  $I^*$ , alors  $C$  a une *dépendance de queue à droite*.
- b) Si  $\lambda_L$  existe et que sa valeur est comprise dans l'intervalle  $I^*$ , alors  $C$  a une *dépendance de queue à gauche*.

Autrement dit, si  $\lambda_U > 0$  (respectivement  $\lambda_L > 0$ ), alors il existe une probabilité non nulle qu'une des deux variables aléatoires prenne une valeur supérieure (respectivement inférieure) à un certain  $u$  lorsque l'autre est supérieure (respectivement inférieure) à  $u$ , pour un certain  $u$  arbitrairement près de 1 (respectivement 0) [Joe01].

**Exemple 3.12.** Considérons la copule logistique bivariée de Gumbel telle que définie à l'exemple 3.6. Comme on a

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} & \text{et} & & \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \\ &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{2}{2 - u} & & & &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( \frac{u}{2 - u} \right) \left( \frac{1}{u} \right) \\ &= 0 & & & &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

cette copule possède une dépendance de queue à gauche, mais ne possède pas de dépendance de queue à droite.

Par ailleurs, il n'est pas rare de constater une absence de dépendance entre deux caractères, ce que nous qualifions d'indépendance. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, nous savons que leur fonction de répartition conjointe s'exprimera comme le produit de leur fonction de répartition marginale respective. Ainsi, le prochain théorème montre la copule qui sera associée à l'indépendance, que nous noterons  $C^\perp(u, v)$  : tout couple de variables aléatoires indépendantes satisfera à l'équation qui y sera énoncée.

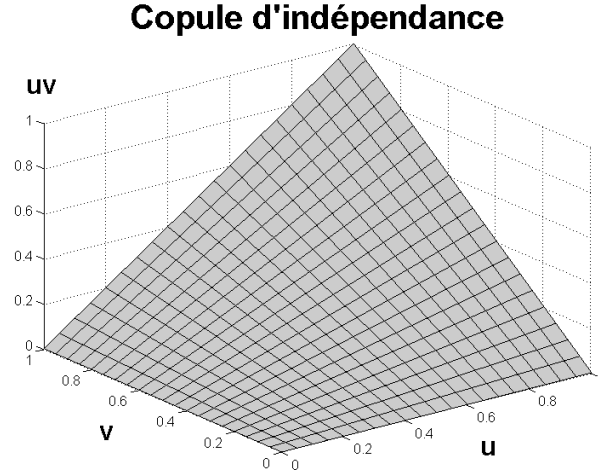
**Théorème 3.13.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires continues.  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes si et seulement si  $C_{X_1, X_2}(u, v) = C^\perp(u, v) = uv$ .

*Démonstration.* La preuve, laissée en exercice, découle du fait que  $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$  et des relations présentées aux équations (3.a), (3.b) et (17).  $\square$

Comme la copule d'indépendance, illustrée à la figure 6, s'exprime par le produit  $uv$ , nous l'appelons parfois *copule produit* et la notons  $\pi(u, v)$ .

## 4 Exemples de copules

Une fois les données recueillies, pour déterminer les relations entre les variables, il faut choisir la copule qui résume le mieux la structure de dépendance à l'aide

FIGURE 6 – Copule d'indépendance  $C^{\perp}(u, v)$ 

de tests d'adéquation pour le type de copules ainsi que le ou les paramètres en cause. Nous voyons ici quelques exemples de copules couramment utilisées en présentant leurs caractéristiques. Nous illustrons également leur densité et simulons un exemple de nuage de points lui étant associé. La densité d'une copule, notée  $c(u, v)$ , se définit à l'aide de la fonction copule  $C(u, v)$  comme suit :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v). \quad (22)$$

À partir de celle-ci, il est possible d'obtenir la fonction de densité [Cla10] :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \times f_1(x_1) \times f_2(x_2), \quad (23)$$

où  $f_1(\cdot)$  et  $f_2(\cdot)$  sont les fonctions de densité marginales. De l'équation (22), on peut facilement calculer que la densité de la copule d'indépendance  $C^{\perp}(u, v)$  vaut 1 sur tout  $\mathbb{I}^2$ .

#### 4.1 Copules elliptiques

Du théorème de Sklar, il est possible d'extraire d'une distribution elliptique une copule dite elliptique. Pour un couple de variables aléatoires  $X = (X_1, X_2)$ , on dira que  $X$  suit une loi elliptique bivariable si et seulement si on peut écrire  $X = \mu + R\Sigma^{1/2}\mathcal{U}$ , où  $\mu$  est la moyenne, si elle existe,  $R$  une variable aléatoire positive indépendante de  $\mathcal{U}$ ,  $\Sigma$  une matrice de forme (matrice de variance-covariance, si elle existe) et  $\mathcal{U}$  une variable aléatoire uniformément distribuée sur le disque unitaire de  $\mathbb{R}^2$  (voir [Mui82] pour plus de détails). Les courbes de niveau des densités de telles distributions forment des ellipses d'excentricité constante [Nel06]. Dans cette famille se trouvent entre autres les copules gaussiennes et les copules Student.

#### 4.1.1 Copule gaussienne

La copule gaussienne fait partie de la famille elliptique des copules bivariées à un paramètre. Utiliser cette copule est conséquent avec la mesure de dépendance obtenue par le coefficient de corrélation linéaire  $\rho$  [Cla10].

**Définition 4.1.** Soient  $\rho$  le coefficient de corrélation,  $\Phi$  la distribution normale  $\mathcal{N}(0,1)$  et  $\Phi_\rho$  la distribution normale bivariée de matrice de corrélation associée à  $\rho$ . Alors, la *copule gaussienne bivariée*  $C_G$  est définie de la manière suivante :

$$C_G(u,v;\rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)). \quad (24)$$

La figure 7 montre le graphique de la densité de trois copules gaussiennes qui diffèrent par leur valeur de  $\rho$ .

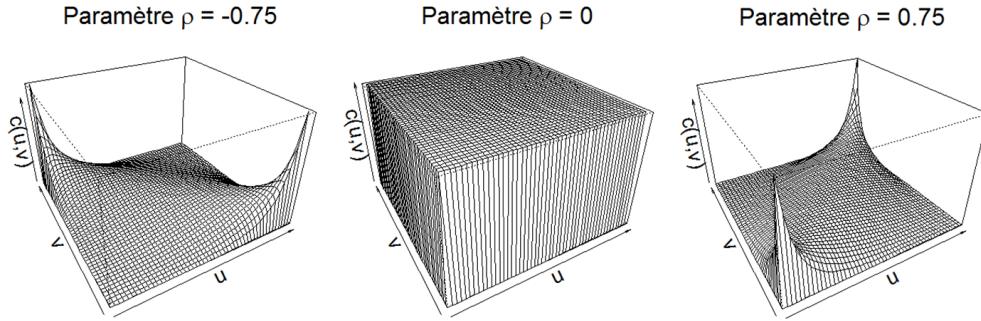


FIGURE 7 – Densité  $c_G(u,v;\rho)$  de 3 copules gaussiennes selon  $\rho$

On peut remarquer que, pour  $\rho = 0$ , on a  $C_G = C^\perp$ . Pour ces mêmes valeurs de  $\rho$ , la figure 8, quant à elle, illustre ce à quoi pourrait ressembler un nuage de points d'une copule gaussienne.

Ne présentant pas de dépendance de queue (sauf pour  $\rho = 1$ ), la copule gaussienne n'est pas adaptée pour modéliser l'interaction de valeurs extrêmes. Dans ce cas, mieux vaudra utiliser d'autres copules, tout comme pour caractériser une dépendance non linéaire.

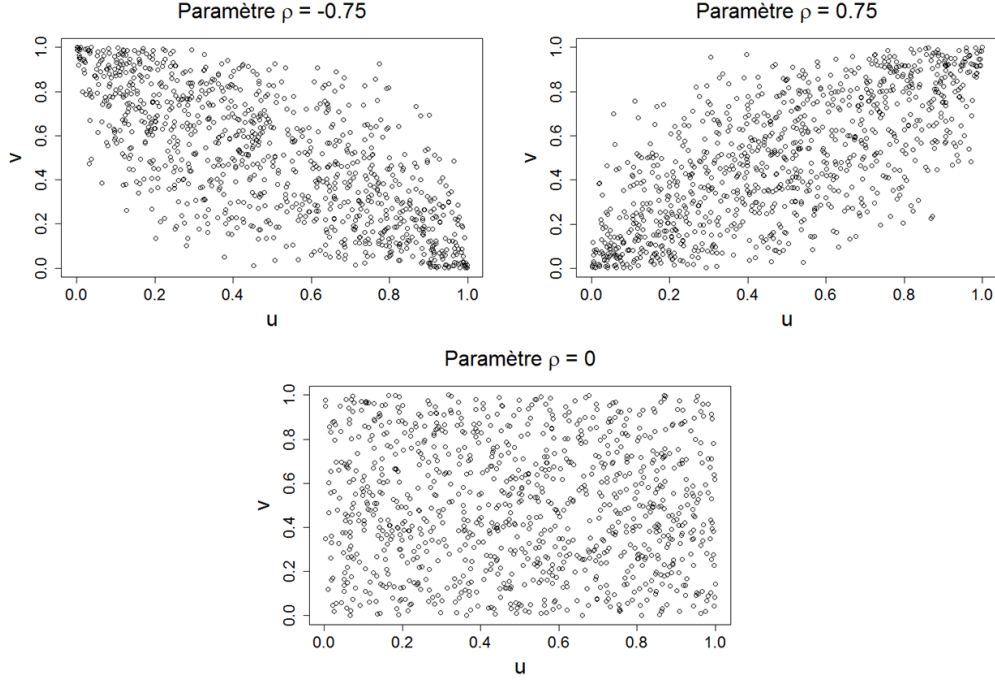
**Exercice 4.2.** Montrer que dans le cas de copules gaussiennes, le tau de Kendall s'écrit de la manière suivante :  $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$ .

#### 4.1.2 Copule Student

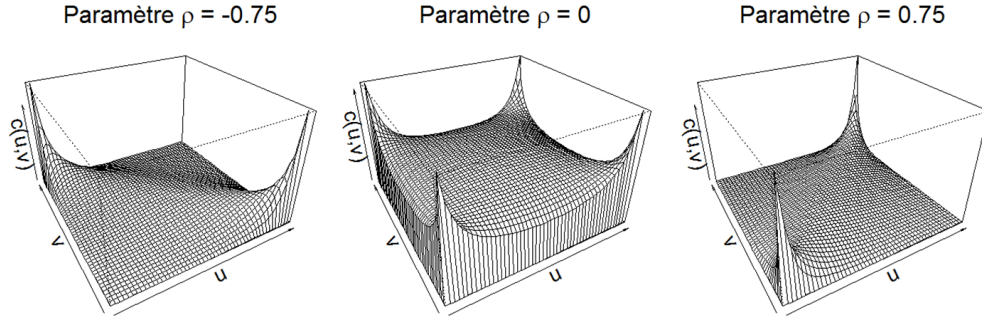
Construite de manière similaire à la copule gaussienne, la copule Student est extraite à partir de la distribution de Student bivariée.

**Définition 4.3.** Soient  $\rho$  le coefficient de corrélation,  $T$  la distribution de Student bivariée standardisée et  $\Phi_{\rho,\kappa}$  la distribution de Student bivariée de matrice de corrélation associée à  $\rho$  et de degré de liberté  $\kappa \geq 3$ . Alors, la *copule Student bivariée*  $C_T$  est définie de la manière suivante :

$$C_T(u,v;\rho,\kappa) = T_{\rho,\kappa}(T^{-1}(u), T^{-1}(v)). \quad (25)$$

FIGURE 8 – Nuages de points de trois copules gaussiennes selon  $\rho$ 

En comparaison avec la copule gaussienne, la figure 9 montre le graphique de la densité de trois copules Student de degré de liberté  $\kappa = 5$  qui diffèrent par leur valeur de  $\rho$ .

FIGURE 9 – Densité  $c_T(u, v; \rho, \kappa = 5)$  de 3 copules Student selon  $\rho$ 

Contrairement à la copule gaussienne, la copule Student montre des dépendances de queue à droite et à gauche pour  $\rho \neq -1$  [Cla10]. De plus, on remarque que l'indépendance n'est pas caractérisée par une valeur nulle de  $\rho$ , car la densité  $c_T(u, v)$  ne vaut pas uniquement 1 sur  $I^2$ . Ce sera le cas notamment pour de petites valeurs de degré de liberté  $\kappa$ . Ceci est également visible en observant les nuages de points de la figure 10, où, pour  $\rho = 0$ , on remarque une plus grande

concentration de points dans les coins du graphique.

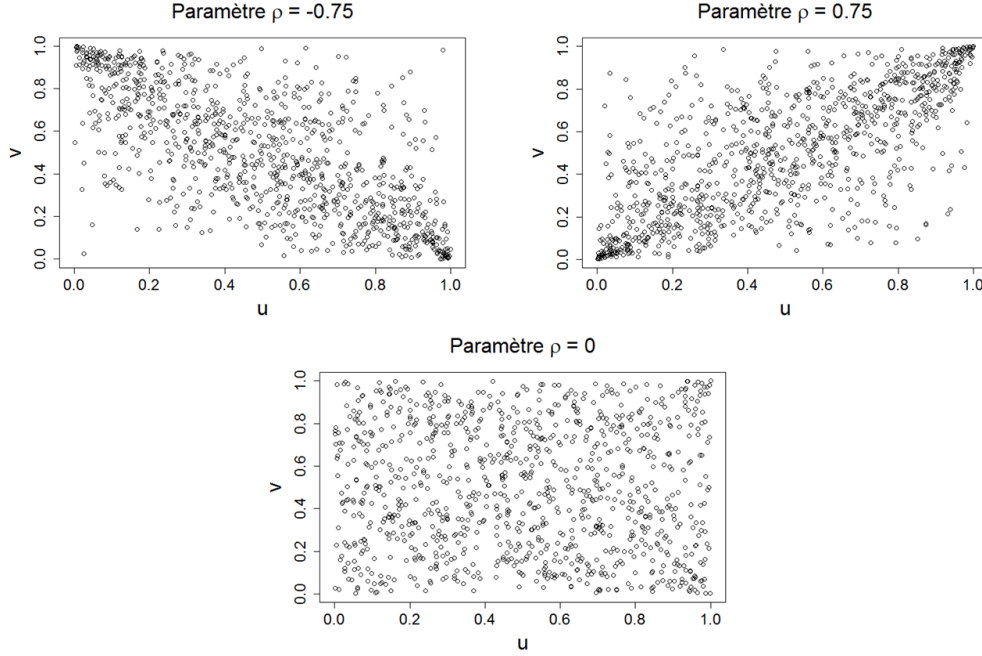


FIGURE 10 – Nuages de points de trois copules Student selon  $\rho$

## 4.2 Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes constituent une classe très importante de copules, principalement en raison de la facilité avec laquelle on peut les construire, du nombre important de familles qui appartiennent à celles-ci et des propriétés intéressantes qu'elles possèdent [Nel06].

**Définition 4.4.** Soit  $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,\infty)$  une fonction telle que, pour tout  $u \in [0,1]$ ,  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi'(u) < 0$  et  $\varphi''(u) > 0$ . Les *copules archimédiennes* sont définies comme suit :

$$C(u,v) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) & \text{si } \varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (26)$$

La fonction  $\varphi$  sera dite *fonction génératrice* de la copule.

Dans plusieurs cas, la fonction génératrice facilite l'étude d'une copule, par exemple en ce qui concerne l'ordre stochastique (voir section 4.4 de [Nel06] pour plus de détails).

**Théorème 4.5. (Corollaire 5.1.4 de [Nel06])** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires de copule archimédienne  $C$  et de fonction génératrice  $\varphi$ . Alors, le tau de Kendall s'écrit

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

### 4.2.1 Copule Clayton

Parmi cette classe de copule, on retrouve notamment la copule Clayton. De générateur  $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ , pour  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ , cette copule s'écrit

$$C_\theta(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}.$$

La figure 11 illustre la densité de la copule Clayton ainsi qu'un nuage de points associé à celle-ci.

On remarque que la copule Clayton est asymétrique et ne détecte pas de dépendance pour de grandes valeurs, c'est-à-dire  $\lambda_U = 0$  et  $\lambda_L \neq 0$ . Le tau de Kendall associé à une copule Clayton de fonction génératrice  $\varphi_\theta(t)$  est  $\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$  (la preuve est laissée en exercice).

### 4.2.2 Copule Frank

La copule Frank, quant à elle, a pour générateur  $\varphi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{\theta t} - 1}{e^\theta - 1}\right)$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}^*$ , et comme formule

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right).$$

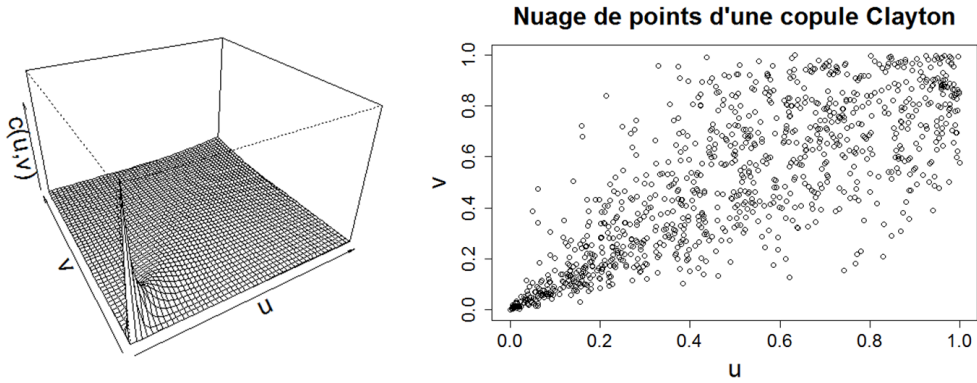
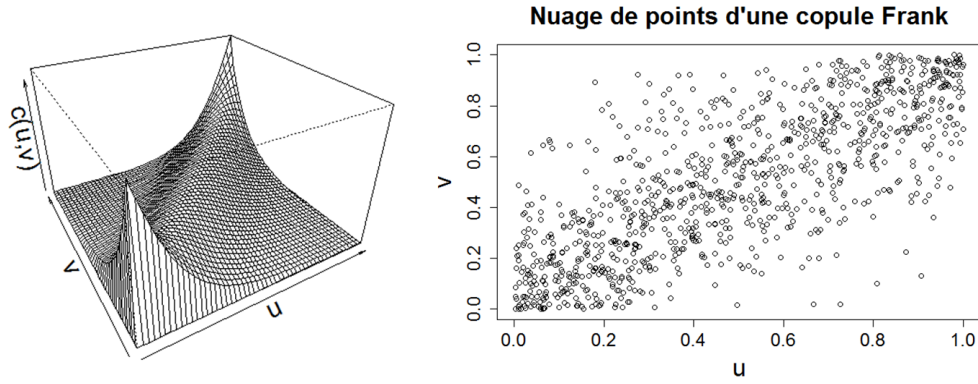


FIGURE 11 – Densité et nuage de points d'une copule Clayton pour  $\theta = 3$

De la même manière que pour la copule Clayton, la figure 12 illustre graphiquement la copule Frank.

Du nuage de points, on remarque que cette copule symétrique présente une plus forte concentration de points aux coins  $(0,0)$  et  $(1,1)$ , comparativement au reste du nuage où l'étalement des points est plus prononcé, ce que corrobore le graphique de la densité.

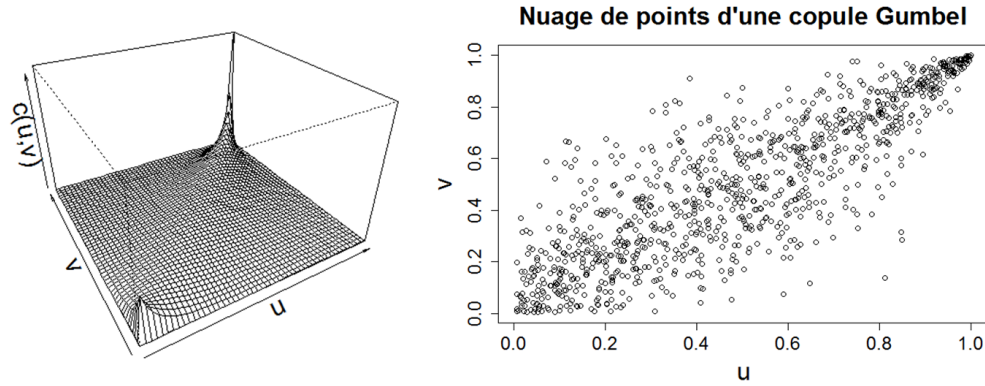
FIGURE 12 – Densité et nuage de points d'une copule Frank pour  $\theta = 7$ 

#### 4.2.3 Copule Gumbel

La dernière copule archimédienne présentée ici est la copule Gumbel, parfois appelée Gumbel-Hougaard, dont la fonction génératrice est  $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$  pour  $\theta \geq 1$ . Cette fonction copule est définie par l'expression suivante :

$$C_\theta(u, v) = e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}}.$$

La figure 13 est l'équivalent des figures 11 et 12 pour la copule de Gumbel.

FIGURE 13 – Densité et nuage de points d'une copule Gumbel pour  $\theta = 3$ 

Étant utile pour déceler des dépendances de queue à gauche et à droite, cette copule aura donc des valeurs de  $\lambda_U$  et  $\lambda_L$  non nulles. Pour cette copule, on a  $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$  (la preuve est laissée en exercice).

**Exercice 4.6.** La copule produit est un cas particulier d'une copule archimédienne. Trouvez la fonction génératrice  $\varphi_\theta(t)$  qui lui est associée.



### 4.3 Copules de valeurs extrêmes

Comme leur nom l'indique, les copules de valeurs extrêmes sont issues de la théorie de valeurs extrêmes. Dans cette dernière, on considère les variables aléatoires de maximum suivantes :

$$M_{(n,X)} = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i) \text{ et } M_{(n,Y)} = \max_{1 \leq j \leq n} (Y_j).$$

On étudie alors la distribution de probabilité de la variable

$$M_n = (M_{(n,X)}, M_{(n,Y)})$$

et les cas pour lesquels cette variable, qu'on a renormalisée, ne suit pas une loi dégénérée. Pour plus de détails, se référer à [Joe01].

**Définition 4.7.** Soit  $k$  une constante réelle positive. Une *copule de valeurs extrêmes* est une copule qui vérifie la relation suivante :

$$C(u^k, v^k) = C^k(u, v). \quad (27)$$

**Exemple 4.8.** La copule de Gumbel est une copule de valeurs extrêmes. En effet, pour une constante  $k$  réelle positive, on a

$$\begin{aligned} C(u^k, v^k) &= e^{-[(-\ln(u^k))^\theta + (-\ln(v^k))^\theta]^{1/\theta}} \\ &= e^{-[k^\theta [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]]^{1/\theta}} \\ &= e^{-k[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}} \\ &= \left( e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}} \right)^k \\ &= C^k(u, v). \end{aligned}$$

## 5 Conclusion

Bien que le domaine des copules soit récent, plusieurs applications y sont rattachées, notamment en finance où l'utilisation des copules est parfois bien plus appropriée que certaines méthodes statistiques traditionnelles de corrélation (voir [Bou10]).

## Références

- [Bou10] Pierre BOUVIER : Application des copules à la finance des marchés. Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal, Montréal, Février 2010.
- [Cla10] Pierre CLAUS : Théorie des copules. Notes de cours, École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information (Ensa), Filière Gestion des risques et ingénierie financière, 2007-2010.

- [Fré51] M. FRÉCHET : Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon Sect. A*, 9:53–77, 1951.
- [Fé56] R. FÉRON : Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 5:3–12, 1956.
- [Gaf13] Félix GAFFIOT : Dictionnaire latin français (sur site Web dicFro). <http://www.micmap.org/dicfro/search/gaffiot/copula>, cité en Juillet 2013.
- [Gum61] E. J. GUMBEL : Bivariate logistic distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 56:335–349, 1961.
- [Hoe40] Wassily Hoeffding : Masstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5(3):179–233, 1940. Réimprimé sous *Scale-invariant correlation theory*. Fisher NI, Sen PK (eds) The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer, New York pages 57-107.
- [Hoe41] Wassily Hoeffding : Masstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen. *Arkiv für matematischen Wirschaften und Sozialforschung*, 7:49–70, 1941. Réimprimé sous *Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions*. Fisher NI, Sen PK (eds) The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer, New York pages 109-133.
- [Joe01] Harry JOE : *Multivariate Models and Dependence Concepts*, volume 73 de *Monographs on statistics and applied probability*. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2001. (publié à l'origine : London ; New York : Chapman & Hall ; First edition, 1997).
- [Mui82] Robb J. MUIRHEAD : *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley series in probability and mathematical statistics. John Wiley & Sons, Inc., 1982.
- [Nel06] Roger B. NELSEN : *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics. Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2e édition, 2006.
- [Skl59] Abe SKLAR : Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8:229–231, 1959.

MYRIAM CHABOT

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Myriam.Chabot@USherbrooke.ca

# Les vagues solitaires

Gabriel Lapointe

**RÉSUMÉ** On montrera comment obtenir les équations décrivant les vagues d'eau à partir de la loi de la conservation de la masse et de la seconde loi de Newton. Celles-ci donneront les équations du mouvement et de la continuité d'Euler. On expliquera comment ces équations sont générées et on utilisera une approche asymptotique pour décrire les solutions à ces équations. Plus particulièrement, on dérivera les équations décrivant les vagues d'eau pour trouver l'équation de Korteweg-de Vries.

## 1 Introduction

Les vagues à la surface de l'eau constituent un problème de la physique et des mathématiques qui fait évidemment partie de la théorie des ondes. Plusieurs types de vagues subsistent dans un certain volume d'eau (par exemple une rivière, un océan ou une mer) et de nombreux facteurs peuvent les influencer, en particulier la profondeur de l'eau, les obstacles (par exemple des bateaux ou des rochers), le vent, la tension, la pression, les ondes dégagées par les plaques tectoniques et plusieurs autres facteurs. Ce phénomène naturel peut donc devenir très complexe lorsque tous ces facteurs sont réunis dans un même problème. Dans notre cas, on négligera plusieurs de ces facteurs, afin de rendre le problème sous une forme simplifiée ce qui en facilitera sa résolution.

On débutera l'étude du problème des vagues d'eau en formulant des hypothèses sur le fluide et on utilisera la loi de la conservation de la masse et la seconde loi de Newton pour retrouver les équations du mouvement et de continuité d'Euler. Ces lois seront développées et expliquées en détails lors des deux prochaines sections. En particulier, on utilisera des concepts (expliqués) de la mécanique des fluides et d'analyse dimensionnelle qui seront très utiles pour l'obtention des équations qui formeront le problème des vagues d'eau. La démarche complète est donnée de façon détaillée aux sections 2 et 3 et est fortement inspirée de [Joh97], [Joh03] et [JD92].

Ensuite, on trouvera l'équation aux dérivées partielles de Korteweg-de Vries (KdV) qui est dérivée des équations du problème des vagues en se servant d'une approche asymptotique. La démarche complète de cette approche sera présentée à la quatrième section et s'inspire fortement de [JD92] et de [CJ08].

---

J'aimerais remercier Vasilisa Shramchenko pour ses remarques judicieuses, son temps et ses relectures qui m'ont grandement aidé à rédiger cet article.

## 2 Définitions, notations et rappels

Tout au long de cet article, certains termes employés sont tirés des notions de la physique, plus particulièrement de la mécanique des fluides. Le but de cette section est donc de définir ces termes et de rappeler des notions d'analyse vectorielle qui seront également utilisées.

Considérons un fluide non visqueux de volume  $V$  contenu dans un bassin  $B \subset \mathbb{R}^3$  borné par la frontière  $\partial B$ . Chaque particule du fluide possède une position de coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  à l'instant  $t$ . Afin d'alléger la notation, on écrira  $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ . Le fluide possède une densité, notée  $\rho(x, y, z, t)$ , au point  $(x, y, z) \in B$  à l'instant  $t$ . De plus, on note  $\nu = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$  sa vitesse d'écoulement au point  $(x, y, z) \in B$  à l'instant  $t$ . Précisons qu'un fluide visqueux est un fluide qui offre une certaine résistance lors de son écoulement (par exemple, le miel offre une plus grande résistance d'écoulement que l'eau).

**Définition 2.1.** On appelle *surface stationnaire* une surface dont l'équation est de la forme  $z = g(x, y)$ , où la fonction  $g$  est indépendante du temps.

On suppose que l'équation  $z = h(x, y, t)$  décrit la surface du fluide en contact avec l'atmosphère et  $z = b(x, y)$  la surface stationnaire du fond du bassin.

Introduisons maintenant la dérivation selon la méthode d'Euler. Soit une fonction  $f(x, y, z, t)$  représentant une quantité physique du fluide au point  $(x, y, z) \in B$  à l'instant  $t$ . Les vitesses d'écoulement horizontale, verticale et en profondeur sont données respectivement par  $(u, v, w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ .

**Définition 2.2.** On note  $\frac{Df}{dt}$  la *dérivée matérielle* de  $f(x, y, z, t)$  et on la définit comme étant

$$\frac{Df}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

On suppose également que le fluide est non rotationnel, c'est-à-dire que l'écoulement du fluide ne forme aucun tourbillon. Il est utile de rappeler quelques notions d'analyse vectorielle qui seront nécessaires pour définir la fonction du potentiel des vitesses. Cette fonction sera très utile pour les deux prochaines sections.

**Définition 2.3.** Soit l'opérateur gradient  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ . On définit la *divergence* d'un champ de vecteurs  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  comme étant

$$\text{div}(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

où l'opération  $\cdot$  représente le produit scalaire.

**Définition 2.4.** Soit l'opérateur gradient  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ . On note  $\Theta$  le *rotationnel* qu'on définit comme étant  $\Theta(\nu) = \nabla \wedge \nu$  où  $\wedge$  est le produit vectoriel

et  $\nu = (u, v, w)$  est la vitesse d'écoulement usuelle. On a donc

$$\Theta(\nu) = \nabla \wedge \nu = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Notons qu'un fluide est dit non rotationnel si  $\Theta(\nu) = (0, 0, 0)$ . Si le fluide est non rotationnel, alors, en vertu de la définition 2.4, on déduit que

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1)$$

On remarque que, pour toute fonction scalaire  $\phi$ , on a toujours  $\Theta(\nabla\phi) = \vec{0}$ . En effet, en vertu de la définition 2.4 du rotationnel, on obtient, par un calcul similaire, que

$$\Theta(\nabla\phi) = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right).$$

En vertu de la commutativité des dérivées, on obtient  $\Theta(\nabla\phi) = \vec{0}$ . Par conséquent, pour un fluide non rotationnel, on peut définir une fonction  $\phi(x, y, z)$  que l'on appelle potentiel des vitesses d'écoulement telle que  $\nu = \nabla\phi$ . Elle sera utilisée dans la section sur l'équation de Korteweg-de Vries.

### 3 Problème initial des vagues d'eau

Dans cette section, le but est de construire le problème initial des vagues d'eau. Pour ce faire, on utilisera les définitions et notations mentionnées à la section précédente. Tout au long de cet article, on considérera que le fluide est incompressible, non rotationnel et non visqueux sur une surface fermée sans tension. La loi de la conservation de la masse et la seconde loi de Newton seront également utilisées et expliquées afin de retrouver les équations du mouvement et de la continuité d'Euler.

#### 3.1 Équations de la physique pour un fluide

Soit  $M$  la masse du fluide de volume  $V$ . Pour une densité uniforme  $\rho$ , on écrit  $M = \rho V$ . Si la densité n'est pas uniforme, on considère un petit volume  $dV$  dans lequel la densité peut être supposée indépendante de la position. Pour ce cas, on a  $dM = \rho dV$ . Par conséquent, on trouve que

$$M = \iiint_V \rho dV. \quad (2)$$

En supposant la densité indépendante du temps, on obtient que

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0. \quad (3)$$

On définit maintenant le débit massique dans un volume  $V$  comme étant le taux de masse d'un fluide sortant au travers une surface fermée  $S$  entourant le volume au temps  $t$ . Soit  $n$  le vecteur normal à la surface et orienté vers l'extérieur de la surface. Selon [IP03], le débit massique s'écrit

$$\frac{dM}{dt} = - \iint_S \rho \nu \cdot n \, dS. \quad (4)$$

En vertu du théorème de Green-Ostrogradski, on a que

$$\iint_S \rho \nu \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \nu) \, dV. \quad (5)$$

De (3), (4) et (5), il vient

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \nu) \, dV = 0.$$

Cette relation est valide pour tout volume  $V$ , alors  $\operatorname{div}(\rho \nu) = 0$ . Étant donné que  $\rho$  est uniforme, on obtient que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

L'équation (6) est appelée l'équation de continuité d'Euler pour un fluide incompressible.

Posons  $G = (0, 0, -g)$ , où  $g$  est l'accélération gravitationnelle. On définit maintenant la force gravitationnelle, notée  $F_g$ , agissant sur un petit volume d'eau comme étant  $dF_g = G \, dM$  où  $dM = \rho \, dV$ . On peut donc réécrire cette équation sous la forme

$$F_g = \iiint_V \rho G \, dV. \quad (7)$$

Notons que le signe négatif vient du fait que l'accélération gravitationnelle est exercée vers le bas. On définit aussi la force de pression, notée  $F_P$ , comme étant la force exerçant une pression  $P$  en un point quelconque  $(x, y, z) \in B$  sur la surface  $S$  du fluide. Cette équation est donnée par  $dF_P = -Pn \, dS$  qui peut être réécrite sous la forme

$$F_P = - \iint_S Pn \, dS. \quad (8)$$

Notons que la force de pression est exercée vers le bas, d'où le signe négatif. En vertu du théorème de Green-Ostrogradski, l'équation (8) est équivalente à

$$F_P = - \iiint_V \nabla P \, dV. \quad (9)$$

On peut maintenant définir la force résultante comme étant la somme des forces exercées sur le fluide, c'est-à-dire que  $F_R = F_g + F_P$ . Par conséquent, on obtient

$$F_R = \iiint_V \rho G \, dV - \iiint_V \nabla P \, dV = \iiint_V (\rho G - \nabla P) \, dV. \quad (10)$$

En vertu de la seconde loi de Newton, on a que  $dF_R = \frac{D\nu}{dt} dM = \rho \frac{D\nu}{dt} dV$ , où  $\frac{D\nu}{dt}$  représente l'accélération au point  $(x, y, z) \in B$  à l'instant  $t$ . Il en découle que

$$F_R = \iiint_V \rho \frac{D\nu}{dt} dV. \quad (11)$$

Des équations (10) et (11), il vient

$$\iiint_V \rho \frac{D\nu}{dt} dV = \iiint_V (\rho G - \nabla P) dV. \quad (12)$$

Comme (12) est vérifiée pour tout  $V$ , on obtient, en divisant par  $\rho$  de part et d'autre, que

$$\frac{D\nu}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + G. \quad (13)$$

En notation cartésienne, l'équation (13) s'écrit de façon équivalente, pour  $x$ ,  $y$  et  $z$ , sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \end{cases}. \quad (14)$$

On sait que le vecteur de la vitesse d'écoulement s'écrit aussi  $\nu = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ .

Or, sur la surface d'eau  $z = h(x, y, t)$ , on a  $w = \frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt}$ . Mais,  $h$  dépend de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $t$ . Par conséquent, on trouve

$$w = \frac{dx}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{Dh}{dt}. \quad (15)$$

De plus, si  $z = b(x, y)$ , la surface stationnaire du fond, on effectue le même calcul lorsqu'on a obtenu (15). On trouve donc

$$w = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} \quad \text{sur } z = b(x, y). \quad (16)$$

Puisque la surface de fond est stationnaire, sa vitesse doit être nulle, c'est-à-dire que  $w = 0$  lorsque  $z = b(x, y)$ .

Lorsqu'on est à la surface du fluide, c'est-à-dire que  $z = h(x, y, t)$ , la pression est identique à celle de la pression atmosphérique notée  $P_a$ . En résumant ce que l'on a fait avec les équations (1), (6), (13), (15) et (16), on obtient donc les équations non linéaires décrivant les vagues d'eau suivantes :

$$\begin{cases} \frac{D\nu}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + G \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ P = P_a & \text{en } z = h(x, y, t) \\ w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} & \text{en } z = h(x, y, t) \\ w = u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} & \text{en } z = b(x, y) \\ w = 0 & \text{en } z = b(x, y) \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}. \quad (17)$$

### 3.2 Adimensionnement (changement d'échelle)

Maintenant, on utilise l'analyse dimensionnelle qui a pour but de simplifier le problème des vagues (17). En effet, les unités de mesure physique du problème deviennent rapidement complexes à utiliser. Afin de réduire cette complexité, on rendra les variables du problème sans dimension, c'est-à-dire sans unité. On procèdera donc à un changement d'échelle pour ces variables.

**Exemple .** On sait que la vitesse, disons  $v(t)$ , s'écrit  $v(t) = \frac{s}{t}$ , où  $s$  est la distance en mètres parcourue au temps  $t$  en secondes. Afin de rendre cette vitesse sans dimension, on posera  $v^*(t) = \frac{t_0}{s_0} v(t)$ , où  $t_0$  est le temps en secondes et  $s_0$  est la distance en mètres, qui rend  $v^*$  sans unité.

Supposons que les vagues d'eau sont périodiques de période  $T$  et qu'on travaille en eau peu profonde. Introduisons l'amplitude moyenne d'une vague que l'on note  $a$ , la profondeur moyenne de l'eau au repos, notée  $h_0$ , et la longueur de la vague en surface, notée  $\lambda$ . Voir la figure 1 (page 7) pour une représentation simple d'une vague d'eau.

On désire rendre la vitesse  $\nu = (u, v, w)$  sans dimension. Pour ce faire, on a besoin de la vitesse de propagation d'une vague que l'on note  $c$ . Selon [Sor06], cette vitesse est donnée par  $c = \sqrt{gh_0}$  ou par  $c = \frac{\lambda}{T}$  en eau peu profonde. Précisons que la provenance de ces formules est détaillée au deuxième chapitre de [Sor06].

On trouve donc que  $\lambda = cT$ . Comme  $c = \sqrt{gh_0}$ , on obtient  $\lambda = \sqrt{gh_0}T$  et  $T = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ . Ainsi, l'unité de la période  $T$  est le temps en secondes. De plus, on sait que  $w$  est la vitesse d'écoulement verticale dont l'unité est le mètre par seconde ( $m/s$ ). On remarque que  $\frac{h_0}{T}$  a la même unité que  $w$ . En remplaçant  $T$  par  $\frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ , on obtient que  $\frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda}$  a également la même unité que  $w$ . Par

conséquent, on introduit  $w^*$  sans dimension tel que  $w = \frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda} w^*$ . Pour les vitesses d'écoulement horizontales  $u$  et  $v$ , introduisons  $u^*$  et  $v^*$  sans dimension tels que  $u = u^*\sqrt{gh_0}$  et  $v = v^*\sqrt{gh_0}$ , car  $\sqrt{gh_0}$  a la même unité que  $u$  et  $v$ .

Maintenant, on veut rendre sans dimension le temps  $t$ . On a vu que  $T = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$  exprime également le temps. On obtient, en introduisant  $t^*$  sans dimension, que  $t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t^*$ .

Puisque  $x$  et  $y$  représentent les coordonnées horizontales à la surface  $S$ , introduisons  $x^*$  et  $y^*$  sans dimension tels que  $x = \lambda x^*$  et  $y = \lambda y^*$ . De la même façon, on introduit  $z^*$  sans dimension tel que  $z = h_0 z^*$ .

Soit  $\eta(x, y, t)$  la hauteur de la vague au temps  $t$ . On sait que  $h_0$  représente la hauteur moyenne de la surface d'eau au repos. Ainsi, on obtient la hauteur  $h(x, y, t)$  en ajoutant la hauteur de la vague à  $h_0$ , c'est-à-dire que  $h = h_0 + \eta$ . Introduisons  $\eta^*$  sans dimension tel que  $\eta = a\eta^*$ , où  $a$  est l'amplitude moyenne de la vague d'eau. Pour la surface de fond  $b(x, y)$ , on introduit  $b^*(x, y)$  sans dimension tel que  $b = h_0 b^*$ .



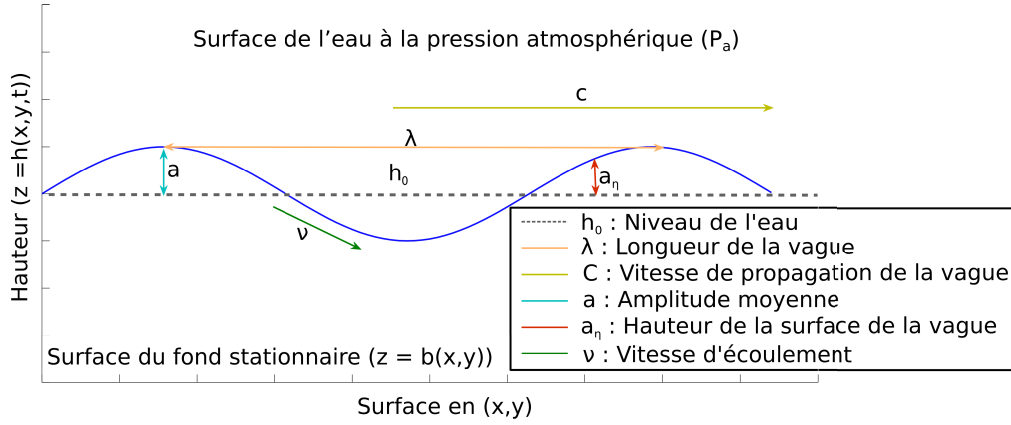


FIGURE 1 – Représentation d'une vague d'eau

On utilise maintenant la relation fondamentale d'hydrostatique donnée par  $P = P_a + \rho g(h_0 - z)$  dont les détails pour obtenir cette relation sont expliqués au chapitre 1 de [Kra05]. Cette relation tient compte de la pression exercée au point  $(x, y, z)$  par le volume d'eau se situant entre la hauteur  $h_0$  et  $z$ . On doit également considérer la pression dynamique supplémentaire de la vague d'eau que l'on notera  $p(x, y, z)$ . Introduisons  $p^*(x, y, z)$  sans dimension tel que  $p = \rho g h_0 p^*$ . Donc, si on ajoute cette pression à celle donnée par la relation d'hydrostatique, on obtient que

$$P = P_a + \rho g(h_0 - z) + \rho g h_0 p^*. \quad (18)$$

Les variables sans dimension calculées précédemment peuvent être résumées dans le système suivant :

$$\begin{cases} w = \frac{h_0 \sqrt{g h_0}}{\lambda} w^*, v = v^* \sqrt{g h_0}, u = u^* \sqrt{g h_0} \\ t = \frac{\lambda}{\sqrt{g h_0}} t^*, x = \lambda x^*, y = \lambda y^*, z = h_0 z^* \\ \eta = a \eta^*, b = h_0 b^*, p = \rho g h_0 p^* \end{cases} \quad (19)$$

Maintenant, le but est de remplacer les variables du système (17) par les variables sans dimension calculées. Si  $z = h = h_0 + a \eta^*$ , alors on sait de (19) que  $h_0 z^* = h_0 + a \eta^*$ . Donc, on obtient que  $z^* = 1 + \frac{a}{h_0} \eta^*$  sur la surface.

À partir de la relation (18) et de la troisième équation du système (17), on peut trouver la pression  $p^*$  sur la surface  $z = h(x, y, t)$ . En effet, on a  $P_a = P = P_a + \rho g(h_0 - h_0 z^*) + \rho g h_0 p^*$ . Donc,  $-\rho g(h_0 - h_0 z^*) = \rho g h_0 p^*$  si et seulement si  $-\rho g h_0(1 - z^*) = \rho g h_0 p^*$  si et seulement si  $z^* - 1 = p^*$ . Par conséquent,  $p^* = \frac{a}{h_0} \eta^*$ , car  $z^* = 1 + \frac{a}{h_0} \eta^*$  tel que calculé dans le paragraphe précédent.

De l'équation (15), du système (19) et puisqu'on a noté  $h = h_0 + a \eta^*$ , on a que  $\frac{h_0 \sqrt{g h_0}}{\lambda} w^* = \frac{\sqrt{g h_0}}{\lambda} \frac{\partial(h_0 + a \eta^*)}{\partial t^*} + \frac{u^* \sqrt{g h_0}}{\lambda} \frac{\partial(h_0 + a \eta^*)}{\partial x^*} + \frac{v^* \sqrt{g h_0}}{\lambda} \frac{\partial(h_0 + a \eta^*)}{\partial y^*}$ . Comme  $h_0$  ne dépend ni de  $x^*$ , ni de  $y^*$  et en divisant des deux côtés par  $\frac{\sqrt{g h_0}}{\lambda}$ , on obtient

que  $h_0 w^* = a \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + au^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + av^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}$ . Par conséquent, on trouve que

$$w^* = \frac{a}{h_0} \left( \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right) \quad \text{en } z^* = 1 + \frac{a}{h_0} \eta^*. \quad (20)$$

Du système (19) dans l'équation (16), on obtient que

$$\frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda} w^* = u^* \sqrt{gh_0} \frac{\partial h_0 b^*}{\partial \lambda x^*} + v^* \sqrt{gh_0} \frac{\partial h_0 b^*}{\partial \lambda y^*}$$

si et seulement si

$$w^* = u^* \frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial b^*}{\partial y^*} \quad \text{en } z^* = b^*(x^*, y^*). \quad (21)$$

En remplaçant les variables de l'équation de continuité d'Euler (6) par les variables sans dimension de (19), on trouve que  $\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda h_0} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0$ . Par conséquent, on obtient l'équation de continuité sans dimension, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \text{div}(\nu^*) = 0. \quad (22)$$

On remplace également les variables de la troisième équation de (14) par celles sans dimension données dans (19) et par l'équation (18). Il vient  $\frac{h_0^2 g}{\lambda^2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{1}{h_0 \rho} \frac{\partial (P_a + \rho g h_0 (1 - z^* + p^*))}{\partial z^*} - g$ . Puisque  $P_a$  est une constante et que  $h_0$  ne dépend pas de  $z^*$ , on a

$$\frac{\partial (P_a + \rho g h_0 (1 - z^*) + \rho g h_0 p^*)}{\partial z^*} = \rho g h_0 \left( -1 + \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right).$$

Ainsi, on obtient  $-\frac{1}{h_0 \rho} \rho g h_0 \left( -1 + \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) - g = -g \frac{\partial p^*}{\partial z^*}$ . Donc, on trouve que

$$\left( \frac{h_0}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = \left( \frac{h_0}{\lambda} \right)^2 \frac{Dw^*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*}. \quad (23)$$

On procède de la même façon pour les vitesses  $u$  et  $v$  données par les première et deuxième équations de (14). En remplaçant par les variables sans dimension de (19) et par l'équation (18), on obtient que

$$\frac{gh_0}{\lambda} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{1}{\rho \lambda} \frac{\partial (P_a + \rho g h_0 (1 - z^* + p^*))}{\partial x^*}.$$

Par conséquent, on obtient que

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{Du^*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*}. \quad (24)$$

De même, on obtient pour la vitesse  $v$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \frac{Dv^*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}. \quad (25)$$

En remplaçant par les variables sans dimension de (19), on trouve, pour les équations d'écoulement non rotationnel données à la dernière ligne de (17), que

$$\left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0. \quad (26)$$

Notons que les coefficients  $\frac{h_0}{\lambda}$  et  $\frac{a}{h_0}$  se retrouvent dans les équations (20), (23), (26) et devant les expressions  $z^*$  et  $p^*$  dans (19). Posons  $\varepsilon = \frac{a}{h_0}$  et  $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$ . On interprète  $\varepsilon$  comme étant l'amplitude de la vague et  $\delta$  comme étant l'inclinaison de la vague. Notons aussi que ces deux variables sont sans dimension. En ramassant les équations (19) à (26), on retrouve alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du^*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \\ \frac{Dv^*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} \\ \delta^2 \frac{Dw^*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ \text{div}(\nu^*) = 0 \\ p^* = \varepsilon \eta^* \\ w^* = \varepsilon \left( \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right) \\ w^* = u^* \frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial b^*}{\partial y^*} \\ w^* = 0 \\ \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \\ \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \\ \text{en } z^* = b^* \\ \text{en } z^* = b^* \end{array} \quad (27)$$

On remarque que si la surface d'eau est au repos parfait, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune vague, alors  $\varepsilon = 0$ . Après le passage d'une vague, l'eau tend à redevenir au repos et cela se caractérise par  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{h_0} = 0$ . L'inclinaison de la vague tend à être nulle plus la longueur  $\lambda$  de la vague est grande, c'est-à-dire que  $\delta \rightarrow 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ . Si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors on constate que  $p^* \rightarrow 0$  et  $w \rightarrow 0$  lorsque  $z \rightarrow 1$ . Il est convenable de considérer le changement d'échelle suivant. Afin de conserver la même notation pour les variables déjà définies sans dimension, on utilise l'opérateur  $\mapsto$  tel que l'expression  $A^* \mapsto kA^*$  signifie  $A^*$  est remplacé par  $kA^*$ . Pour le vecteur de vitesse  $\nu^*$  et la pression  $p^*$ , on remplace  $\nu^* \mapsto \varepsilon \nu^*$  et  $p^* \mapsto \varepsilon p^*$ . Il en découle le système final des vagues d'eau suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} \\ \delta^2 \left[ \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \right] = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ \text{div}(\nu^*) = 0 \\ p^* = \eta^* \\ w^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right) \\ w^* = u^* \frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial b^*}{\partial y^*} \\ w^* = 0 \\ \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \\ \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \\ \text{en } z^* = b^* \\ \text{en } z^* = b^* \end{array} \quad (28)$$

En prenant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on trouve le problème linéaire des vagues d'eau suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} \\ \delta^2 \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ \operatorname{div}(\nu^*) = 0 \\ p^* = \eta^* \\ w^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} \\ w^* = u^* \frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial b^*}{\partial y^*} \\ w^* = 0 \\ \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } z^* = 1 \\ \text{en } z^* = 1 \\ \text{en } z^* = b^* \\ \text{en } z^* = b^* \end{array} \quad (29)$$

Pour les  $p^*$ ,  $\eta^*$  et  $w^*$  définies en  $z^* = 1$ , on peut approximer les solutions à l'aide d'une série de Taylor par rapport à  $\varepsilon$ . Aussi, comme  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il est possible d'approximer  $p^*$ ,  $\eta^*$  et  $w^*$  sous la forme de séries de puissances données par

$$p^* \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n^*, \quad \eta^* \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n^*, \quad w^* \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n^*.$$

## 4 Équation de Korteweg-de Vries

Le but de cette section est de réduire les équations de (28) selon une approche asymptotique, c'est-à-dire en séries de puissances de Taylor afin de trouver l'équation de Korteweg-de Vries. Nous développerons les équations du système (28) en séries de Taylor par rapport au paramètre  $\varepsilon$ . Les équations du système deviennent des égalités des séries de Taylor en  $\varepsilon$ , donc on sait que les coefficients près de  $\varepsilon^n$  des deux côtés coïncident. Alors, en considérant les termes avec  $\varepsilon^n$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$ , on produit les systèmes pour les coefficients de Taylor de  $\eta^*$ . En trouvant les coefficients  $\eta_n^*$  à partir de ces systèmes, on obtient les approximations successives à la solution  $\eta^*$ . Le système pour  $n = 2$  donnera l'équation de Korteweg-de Vries.

Pour effectuer cette approche asymptotique, on s'intéresse aux longues vagues de faible amplitude, c'est-à-dire quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\delta \rightarrow 0$ . De plus, on considérera que les vagues se propagent dans la direction des  $x$  positif, c'est-à-dire que  $v = 0$  et qu'on enlève toute dépendance par rapport à  $y$ . On ajoute également l'hypothèse que  $b^* \equiv 0$ .

On veut maintenant étudier le système seulement avec le paramètre  $\varepsilon$ . On se propose donc les changements d'échelle  $x^* \mapsto \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} x^*$ ,  $t^* \mapsto \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} t^*$  et  $w^* \mapsto \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} w^*$ . En remplaçant dans les équations de (28) et puisque aucune dépendance en  $y$

n'existe, on obtient que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \\ \varepsilon \left[ \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \right] = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \\ p^* = \eta^* \\ w^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right) \\ w^* = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \varepsilon \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^*(x^*, t^*) \\ \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^*(x^*, t^*) \\ \text{en } z^* = 0 \end{array} \quad (30)$$

La dernière équation de (30) permet d'introduire le potentiel des vitesses d'écoulement. La notion du potentiel des vitesses a été expliquée à la deuxième section de cet article. Notons que les mêmes notations seront utilisées.

Posons  $u^* = \frac{\partial \phi}{\partial x^*}$  et  $\varepsilon w^* = \frac{\partial \phi}{\partial z^*}$ . Une telle fonction  $\phi$  existe grâce à la dernière équation de (30). En substituant dans la première équation de (30), on trouve que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^* \partial x^*} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^* \partial x^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0.$$

En intégrant par rapport à  $x^*$ , on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right)^2 + p^* = f_0(z^*, t^*), \quad (31)$$

où  $f_0(z^*, t^*)$  est une fonction d'intégration. On effectue le même calcul (en intégrant en  $z^*$  cette fois) pour la seconde équation de (30) et on obtient aussi l'équation (31), mais avec  $f_1(x^*, t^*)$  comme fonction d'intégration. On trouve alors que  $f_1(x^*, t^*) = f_0(z^*, t^*)$  et on déduit qu'il n'y a pas de dépendance en  $x^*$  et  $z^*$ . On peut donc écrire

$$R(t^*) = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right)^2 + p^*, \quad (32)$$

où  $R(t^*)$  est constante dans le domaine  $\{(x^*, z^*) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z^* < 1 + \varepsilon \eta^*(x^*, t^*)\}$  pour tout  $t^*$ . Posons  $\phi_f = \phi + f(t^*)$  où  $f(t^*) = -\int_0^{t^*} R(t) dt$ . On trouve alors que

$$\frac{\partial \phi_f}{\partial t^*} = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} - R(t^*). \quad (33)$$

Notons que le potentiel des vitesses  $\phi$  est défini à l'addition d'une fonction indépendante de  $(x, y, z)$  près. De (33), il vient que

$$\frac{\partial \phi_f}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \phi_f}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_f}{\partial z^*} \right)^2 + p^* = 0. \quad (34)$$

En substituant  $\phi = \phi_f - f(t^*)$  dans (34) on obtient que

$$\frac{\partial \phi_f}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \phi_f}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_f}{\partial z^*} \right)^2 + p^* = 0. \quad (35)$$

On écrit  $\phi$  au lieu de  $\phi_f$ . Puisque  $p^* = \eta^*$  en  $z = 1 + \varepsilon\eta^*$ , puis en remplaçant les valeurs de  $u^*$  et  $\varepsilon w^*$  dans les équations de (30), on tire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right)^2 + \eta^* = 0 & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ \frac{\partial \phi}{\partial z^*} = \varepsilon \left[ \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right) \right] & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0, 1 + \varepsilon\eta^*) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Notons que les solutions de  $\phi(x^*, t^*, z^*)$  et de  $\eta^*(x^*, t^*)$  dans (36) sont des fonctions analytiques de paramètre  $\varepsilon$ , c'est-à-dire qu'elles peuvent être exprimées sous la forme de séries de puissances en  $\varepsilon$  suivantes :

$$\phi(x^*, z^*, t^*) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_k(x^*, z^*, t^*), \quad \eta^*(x^*, t^*) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \eta_k^*(x^*, t^*).$$

Afin d'obtenir l'équation de Korteweg-de Vries, qui est l'objectif de la section, on procédera en deux étapes. La première sera de dériver l'équation d'onde qui est détaillée dans [Whi11]. Pour cela, on effectuera l'approximation d'ordre 1 pour  $\phi(x^*, t^*, z^*)$  et  $\eta(x^*, t^*)$  en  $\varepsilon$ . Pour la seconde étape, on procédera à un changement de variable dans (36) et on trouvera les approximations d'ordre 2 en  $\varepsilon$  du nouveau système. Cela nous permettra de trouver l'équation de Korteweg-de Vries.

#### 4.1 Équation de l'onde

L'approximation d'ordre 0 en  $\varepsilon$ , c'est-à-dire que  $\phi \in \mathcal{O}(\varepsilon^0)$  et  $\eta^* \in \mathcal{O}(\varepsilon^0)$ , signifie qu'on ne conserve que les termes de degré 0 ou, de façon équivalente, les termes contenant  $\varepsilon$  à la puissance 0. Donc, on a les approximations d'ordre 0 suivantes :

$$\phi(x^*, z^*, t^*) \approx \phi_0(x^*, z^*, t^*) \text{ et } \eta(x^*, t^*) \approx \eta_0(x^*, t^*).$$

On obtient alors l'approximation suivante du système (36) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_0}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial z^*} \right)^2 + \eta_0^* = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial (z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0, 1) \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Des trois dernières équations de (37), on déduit que  $\phi_0$  est indépendant de  $z^*$ . Donc, on peut poser  $\psi(x^*, t^*) = \phi_0(x^*, z^*, t^*)$ . Avec la deuxième équation de (37), la première équation de (37) s'écrit comme étant

$$\frac{\partial \psi}{\partial t^*} + \eta_0^* = 0 \quad \text{en } z^* = 1. \quad (38)$$

C'est la solution de l'équation (38) qui fournit l'approximation de  $\eta^*$  du profil des vagues.

Procédons maintenant à l'approximation d'ordre 1 en  $\varepsilon$  du système (36), c'est-à-dire que  $\phi \in \mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $\eta^* \in \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Donc, on a  $\phi \approx \phi_0 + \varepsilon\phi_1$  et  $\eta^* \approx \eta_0^* + \varepsilon\eta_1^*$ . On déduit alors que

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z^*}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z^*}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{\partial\phi_0}{\partial z^*}\frac{\partial\phi_1}{\partial z^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

En vertu du calcul précédent, en remplaçant les approximations de  $\phi$  et  $\eta^*$  dans (36) et en ne conservant que les termes de degré 1 en  $\varepsilon$ , le système se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi_1}{\partial t^*} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x^*}\right)^2 + \eta_1^* + \frac{\partial\phi_1}{\partial z^*}\frac{\partial\phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z^*} = \frac{\partial\eta_0}{\partial t^*} & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2\phi_1}{\partial(z^*)^2} + \frac{\partial^2\phi_0}{\partial(x^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0,1) \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Puisque  $\psi(x^*, t^*) = \phi_0(x^*, z^*, t^*)$ , la troisième équation de (39) s'écrit

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial(z^*)^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial(x^*)^2} \quad \text{en } z^* \in (0,1). \quad (40)$$

De l'équation (40), puis en intégrant par rapport à  $z^*$ , il vient que

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z^*} = -z^* \frac{\partial^2\psi}{\partial(x^*)^2} + C(x^*, t^*) \quad \text{en } z^* \in [0,1], \quad (41)$$

où  $C(x^*, t^*)$  est une fonction arbitraire de  $x^*$  et  $t^*$ . La condition initiale donnée par la dernière équation de (39) implique que  $C(x^*, t^*) = 0$ . Par conséquent, l'équation (41) en  $z^* = 1$  devient :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial(x^*)^2} = -\frac{\partial\eta_0}{\partial t^*} \quad \text{en } z^* = 1. \quad (42)$$

Des équations trouvées en  $z^* = 1$ , on peut maintenant déduire l'équation linéaire de l'onde (voir pages 5,6 et 134 dans [Whi11]) donnée par

$$\frac{\partial^2\eta_0^*}{\partial(x^*)^2} - \frac{\partial^2\eta_0^*}{\partial(t^*)^2} = 0 \quad \text{en } z^* = 1. \quad (43)$$

En effet, en dérivant par rapport à  $t^*$ , l'équation (38) devient

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial(t^*)^2} = -\frac{\partial\eta_0^*}{\partial t^*} \quad \text{en } z^* = 1.$$

On en déduit, avec l'équation (42), que

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial(t^*)^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial(x^*)^2} = -\frac{\partial\eta_0^*}{\partial t^*} \quad \text{en } z^* = 1.$$

En dérivant l'équation précédente par rapport à  $t^*$ , on trouve que

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial (t^*)^3} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial (t^*) \partial (x^*)^2} = -\frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial (t^*)^2} \quad \text{en } z^* = 1. \quad (44)$$

De plus, en dérivant deux fois l'équation (38) par rapport à  $x^*$ , on obtient que

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial (t^*) \partial (x^*)^2} = -\frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial (x^*)^2} \quad \text{en } z^* = 1. \quad (45)$$

Par conséquent, en combinant les équations (44) et (45), on retrouve l'équation d'onde (43). D'après [Whi11], la solution générale de cette équation est de la forme  $\eta_0^*(x^*, t^*) = f(x^* - t^*) + \bar{f}(x^* + t^*)$ , où  $f$  représente la propagation à la vitesse unitaire de la vague sur l'axe des  $x$  positifs et  $\bar{f}$  la propagation à la vitesse unitaire de la vague sur l'axe des  $x$  négatifs. Au début de la section, on a considéré que les vagues se propagent selon l'axe des  $x$  positifs, alors posons  $\eta_0^*(x^*, t^*) = f(x^* - t^*)$ . Cela conclut la première étape de notre objectif puisqu'on a trouvé l'équation d'onde. L'équation de KdV est obtenue en considérant le problème par rapport aux différentes variables.

## 4.2 Équation de KdV

Considérons le changement de variables dans (36) donné par  $(x^*, t^*) \mapsto (\xi, \tau)$ , où  $\xi = x^* - t^*$  et  $\tau = \varepsilon t^*$ . On trouve  $x^* = \xi + \frac{\tau}{\varepsilon}$  avec  $t^* = \frac{\tau}{\varepsilon}$ . Il en découle, à l'aide de la dérivation en chaîne, que

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t^*} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Les équations de (36) deviennent donc

$$\begin{cases} -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right)^2 + \eta^* = 0 & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \\ \frac{\partial \phi}{\partial z^*} = \varepsilon \left[ -\frac{\partial \eta^*}{\partial \xi} + \varepsilon \left( \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \eta^*}{\partial \xi} \right) \right] & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon \eta^* \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0, 1 + \varepsilon \eta^*) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases} \quad (46)$$

De façon similaire au système (36),  $\phi(\xi, z^*, \tau)$  et  $\eta^*(\xi, \tau)$  peuvent être approximés par des séries de puissances en  $\varepsilon$  comme suit :

$$\phi(\xi, z^*, \tau) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k(\xi, z^*, \tau), \quad \eta^*(\xi, \tau) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_k(\xi, \tau).$$

On peut maintenant procéder à l'approximation d'ordre 2 en  $\varepsilon$  des solutions  $\phi$  et  $\eta$  du système (46). On débutera avec les équations d'ordre 0 en  $\varepsilon$ , puis on obtiendra les équations qui se trouvent à l'ordre 1 et 2 en  $\varepsilon$  du système (46) dans le but de déterminer les  $\Phi_k$  et  $H_k$  pour  $k = 0, 1, 2$ .



L'approximation d'ordre 0 en  $\varepsilon$  du système (46) donne le système approximatif suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} \right)^2 + H_0 = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial (z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0,1) \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases} \quad (47)$$

Des trois dernières équations de (47), on déduit que  $\Phi_0$  est indépendant de  $z^*$ , alors on peut poser  $\Phi_0(\xi, z^*, \tau) = \gamma(\xi, \tau)$  pour  $z^* \in [0,1]$ . Cela implique que  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0$  en  $z^* = 1$ , donc la première équation de (47) devient

$$H_0(\xi, \tau) = \frac{\partial \gamma(\xi, \tau)}{\partial \xi} \quad \text{en } z^* = 1. \quad (48)$$

Comme on a déterminé  $H_0$  et  $\Phi_0$  en termes de  $\gamma$ , nous procéderons à la considération des termes d'ordre 1 en  $\varepsilon$  dans le système (46) afin de trouver  $H_1$  et  $\Phi_1$ . On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + H_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi} & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (z^*)^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0,1) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases} \quad (49)$$

Puisque  $\gamma(\xi, \tau) = \Phi_0(\xi, z^*, \tau)$ , la troisième équation de (49) s'écrit  $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (z^*)^2} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2}$  en  $z^* \in (0,1)$ . En l'intégrant par rapport à  $z^*$ , on obtient

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -z^* \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + C(\xi, \tau), \quad (50)$$

où  $C(\xi, \tau)$  est une fonction arbitraire de  $\xi$  et  $\tau$ . Or, la condition initiale exprimée par la dernière équation de (49) implique que  $C(\xi, \tau) = 0$ . Par conséquent, on obtient

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -z^* \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} \quad \text{pour } z^* \in [0,1]. \quad (51)$$

En intégrant (51) par rapport à  $z^*$ , on trouve

$$\Phi_1(\xi, z^*, \tau) = -\frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \alpha(\xi, \tau) \quad \text{pour } z^* \in [0,1], \quad (52)$$

où  $\alpha(\xi, \tau)$  est la fonction d'intégration indépendante de  $z^*$ . En dérivant l'équation (52) en  $\xi$ , on a

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = -\frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^3 \gamma}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \alpha(\xi, \tau)}{\partial \xi} \quad \text{pour } z^* \in [0,1]. \quad (53)$$

Par conséquent, en remplaçant (53) dans la première équation de (49) et en évaluant (52) en  $z^* = 1$ , on trouve

$$H_1(\xi, \tau) = -\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \gamma}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \alpha(\xi, \tau)}{\partial \xi}. \quad (54)$$

Notons que le but est d'obtenir une équation ne contenant que des termes en  $\gamma$  pour ensuite les réécrire en termes de  $H_0$ . Pour ce faire, on a besoin de l'approximation d'ordre 2 en  $\varepsilon$  des solutions du système (46), c'est-à-dire que  $\phi \in \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et  $\eta^* \in \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Le but de cette approximation est de trouver  $\Phi_2$ .

Notons que la deuxième équation de (46) est en  $z^* = 1 + \varepsilon \eta^*$ . Comme  $\phi$  dépend de  $z^*$  et que  $z^*$  dépend de  $\varepsilon$ , on développe  $\frac{\partial \phi}{\partial z^*}(\xi, 1 + \varepsilon \eta^*, \tau)$  en série par rapport à  $z^*$  en  $z^* = 1$  et on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial z^*}(\xi, 1 + \varepsilon \eta^*, \tau) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right|_{z^*=1} + \varepsilon \eta^* \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial (z^*)^2} \right|_{z^*=1} + \frac{\varepsilon^2 (\eta^*)^2}{2} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial (z^*)^3} \right|_{z^*=1} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (55)$$

Notons qu'il en est de même pour  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, 1 + \varepsilon \eta^*, \tau)$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(\xi, 1 + \varepsilon \eta^*, \tau)$ . On sait que  $\eta^* = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$  et que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z^*} = \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (56)$$

Rappelons que  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0$  en  $z^* = 1$ . Alors, en substituant (56) dans (55), on trouve

$$\frac{\partial \phi}{\partial z^*} = \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} + \varepsilon^2 H_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (z^*)^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \text{en } z^* = 1. \quad (57)$$

Des expressions similaires à (57) peuvent être obtenues pour les dérivées par rapport à  $\xi$  et  $\tau$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \varepsilon H_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 H_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\varepsilon^2 H_2}{2} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \xi^3} \right) \\ &+ \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \varepsilon^2 H_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (58)$$

et on procède de façon analogue pour  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ . En substituant (57) et (58) dans les équations de (46) et en tenant compte que  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0$  en  $z^* = 1$ , on déduit le système suivant pour les termes avec  $\varepsilon^2$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} \right)^2 + H_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z^*} - H_0 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \frac{\partial H_0}{\partial \xi} & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial (z^*)^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0, 1) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \quad (59)$$

En vertu de (51) et de (53), on trouve que

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \gamma}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \alpha(\xi, \tau)}{\partial \xi} \quad \text{en } z^* = 1. \quad (60)$$

De la troisième équation de (59) et en vertu de l'équation (52), on a que

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial (z^*)^2} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} = \frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} \quad \text{pour } z^* \in (0,1). \quad (61)$$

On veut retrouver  $\Phi_2$ , alors on intègre une première fois l'équation (61) par rapport à  $z^*$  puisque ni  $\gamma$  ni  $\alpha$  ne dépendent de  $z^*$ . On obtient que

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z^*} = \frac{(z^*)^3}{6} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - z^* \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta_0(\xi, \tau) \quad \text{pour } z^* \in (0,1), \quad (62)$$

où  $\beta_0(\xi, \tau)$  est une fonction arbitraire en  $(\xi, \tau)$ . Or, en vertu de la quatrième équation de (59), on a que  $\beta_0(\xi, \tau) = 0$ . En intégrant l'équation (62) en  $z^*$ , on trouve que

$$\Phi_2(\xi, \tau) = \frac{(z^*)^4}{24} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta(\xi, \tau) \quad \text{pour } z^* \in [0,1], \quad (63)$$

où  $\beta(\xi, \tau)$  est une fonction arbitraire en  $(\xi, \tau)$ . Afin d'obtenir une équation dont les termes seront en  $\gamma$ , on remplace les termes dans la deuxième équation de (59) par (48), (54), (52) et (62). En effectuant les dérivées nécessaires, on obtient en  $z^* = 1$  :

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2}.$$

En simplifiant le tout, on tire

$$2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau \partial \xi} + 3 \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} = 0 \quad \text{en } z^* = 1.$$

En vertu de l'équation (48), on obtient l'équation de Korteweg-de Vries à la hauteur des vagues  $\eta^*(\xi, \tau) \approx H_0(\xi, \tau)$  :

$$2 \frac{\partial H_0}{\partial \tau} + 3 H_0 \frac{\partial H_0}{\partial \xi} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 H_0}{\partial \xi^3} = 0 \quad \text{en } z^* = 1. \quad (64)$$

Alors,  $H_0$  est une solution de l'équation KdV (64). En connaissant  $H_0$ , on trouve le potentiel des vitesses  $\phi$  comme suit. Rappelons que le développement de Taylor d'ordre 2 en  $\varepsilon$  utilisé pour  $\phi$  est  $\phi(\xi, z^*, \tau) = \Phi_0(\xi, z^*, \tau) + \varepsilon \Phi_1(\xi, z^*, \tau) + \varepsilon^2 \Phi_2(\xi, z^*, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ . Des équations (52), (63) et, puisque  $\Phi_0(\xi, z^*, \tau) = \gamma(\xi, \tau)$ , on obtient pour  $z^* \in [0,1]$  :

$$\phi = \gamma + \varepsilon \left[ -\frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \alpha \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{(z^*)^4}{24} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (65)$$

En vertu de (48), on peut réécrire (65) selon  $H_0$  comme suit pour  $z^* \in [0,1]$  :

$$\phi = \frac{\partial H_0}{\partial \xi} + \varepsilon \left[ -\frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^3 H_0}{\partial \xi^3} + \alpha \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{(z^*)^4}{24} \frac{\partial^5 H_0}{\partial \xi^5} - \frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (66)$$

Si l'on considère aussi les ordres supérieurs à 2 en  $\varepsilon$ , on trouve que la solution au potentiel des vitesses (65), pour  $z^* \in [0,1]$ , en supposant que les fonctions d'intégration sont nulles, s'écrit, selon [Bur11], sous la forme :

$$\phi(\xi, z^*, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{(z^*)^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n+1} H_0(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2n+1}}.$$

## 5 Solitons

Une vague solitaire est une vague qui a une amplitude finie et qui se propage à une vitesse constante sans se déformer dans un milieu non linéaire. D'après [Mey11] (page 1521), la première observation d'une telle vague a été faite en 1834 par John Scott Russell. En 1895, le professeur Diederik Korteweg et son étudiant au doctorat Gustav de Vries ont dérivé l'équation aux dérivées partielles modélisant la vague solitaire observée par Russell. Cette équation porte maintenant leur nom, c'est-à-dire l'équation de Korteweg-de Vries.

Les solitons sont des solutions particulières exactes de l'équation de KdV qui représentent des vagues solitaires. Avant de donner de telles solutions, il est utile de réécrire l'équation de KdV (64) selon le changement de variables suivant :

$$\tilde{\tau} = \alpha \tau, \quad \tilde{\xi} = \beta \xi, \quad \tilde{H}_0 = \gamma H_0,$$

où  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . On veut que

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\tau}} + 6\tilde{H}_0 \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial^3 \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\xi}^3} = 0. \quad (67)$$

On trouve que  $\frac{\partial H_0}{\partial \xi} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\xi}}$  et  $\frac{\partial H_0}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\tau}}$ . En substituant dans l'équation (64), on obtient que

$$\frac{2\alpha}{\gamma} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{3\beta}{\gamma^2} \tilde{H}_0 \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\beta^3}{3\gamma} \frac{\partial^3 \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\xi}^3} = 0. \quad (68)$$

Afin d'obtenir l'équation (67), on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2\alpha}{\gamma} = 1 \\ \frac{3\beta}{\gamma^2} = 6 \\ \frac{\beta^3}{3\gamma} = 1 \end{cases}. \quad (69)$$

On trouve alors la solution suivante au système (69) :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[5]{\frac{3}{8}}, \quad \beta = \sqrt[5]{\frac{9}{2}}, \quad \gamma = \sqrt[5]{\frac{3}{8}}. \quad (70)$$

Par conséquent, en remplaçant les valeurs trouvées en (70) dans (68), on obtient bien l'équation (67).

Deux solutions exactes de l'équation (67), avec graphiques, sont données par [Bra12]. Ces deux solutions sont :

$$\widetilde{H}_0 = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{\beta}}{2} (x^* - \beta t^*) \right)^2 \quad (71)$$

et

$$\widetilde{H}_0 = -\frac{\beta}{2} \operatorname{cosech} \left( \frac{\sqrt{\beta}}{2} (x^* - \beta t^*) \right)^2, \quad (72)$$

où  $\beta > 0$ . La solution (71) représente la vague solitaire se déplaçant vers la droite tandis que la solution (72) représente la vague solitaire se déplaçant vers la gauche.

## Références

- [Bra12] Klaus BRAUER : The korteweg-de vries equation : History, exact solutions, and graphical representation. *University of Osnabrück*, page 20, 2012.
- [Bur11] Georgy I. BURDE : Solitary wave solutions of the high-order kdv models for bi-directional water waves. *Elsevier*, 16(3):1314–1328, 2011.
- [CJ08] A. CONSTANTIN et R.S. JOHNSON : On the non-dimensionalisation, scaling and resulting interpretation of the classical governing equations for water waves. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 15:58–73, 2008.
- [IP03] Luc Robillard ION PARASCHIVOIU, Michel Prud'homme : *Mécanique des fluides*. Presses inter Polytechnique, 2003.
- [JD92] R.S. JOHNSON et P.G. DRAZIN : *Solitons : An introduction*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [Joh97] R.S. JOHNSON : *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [Joh03] R.S. JOHNSON : The classical problem of water waves : a reservoir of integrable and nearly-integrable equations. *journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 10:72–92, 2003.
- [Kra05] Egon KRAUSE : *Fluid Mechanics With Problems and Solutions, and an Aerodynamics Laboratory*. Springer, 2005.
- [Mey11] Robert A. MEYERS : *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, volume 1. Springer, 2011.

- [Sor06] Robert M. SORENSEN : *Basic Coastal Engineering*. US Springer, third édition, 2006.
- [Whi11] G.B. WHITHAM : *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley and Sons, 2011.

GABRIEL LAPOINTE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

*Courriel:* gabriel.lapointe7@gmail.com

# Espace-temps de Minkowski et univers d'Einstein

Yannick Lebrun

**RÉSUMÉ** Le but de cet article est d'initier le lecteur à des géométries associées à la théorie de la relativité en physique. Nous présentons tout d'abord l'espace-temps et y introduisons la géométrie de Minkowski. Par la suite, nous nous intéressons à l'univers d'Einstein avec une attention marquée sur sa visualisation. Finalement, nous discutons brièvement du fait que ce dernier compactifie l'espace-temps.

## 1 Introduction

Le temps nous semble être une chose immuable : une chose qui s'écoule constamment, peu importe notre point de vue. Or, depuis Albert Einstein et sa théorie de la relativité, cette intuition ne correspond plus avec la représentation physique de notre réalité. La perception du temps, au même titre que celle des distances, dépend de notre point de vue. Autrement dit, elle est relative à notre référentiel. Cette conclusion nous amène à considérer l'espace et le temps comme des entités indissociables. Leur union forme une nouvelle structure : l'espace-temps.

L'utilisation de l'espace-temps passe principalement par l'étude du mouvement. La branche de la physique mécanique qui étudie le mouvement des objets est la cinématique. Or, l'outil principal de la cinématique est la géométrie. Ainsi, les idées reliées à l'espace-temps peuvent être interprétées dans un contexte plus mathématique. C'est le point de vue que nous emploierons majoritairement dans cet article.

À la section 2, nous présentons plus formellement l'espace-temps et définissons les photons et les cônes de lumière. La géométrie de Minkowski, qui nous permet de traiter de l'espace-temps de Minkowski, y est introduite par la suite. À la section 3, nous abordons un espace semblable qui est l'univers d'Einstein. Nous discutons de ses principales caractéristiques et étudions les façons de le visualiser. Les photons et les cônes de lumière sont revisités afin de profiter de ces visualisations. Nous terminons avec la section 4 en établissant que l'univers d'Einstein est une compactification de l'espace-temps de Minkowski.

---

J'aimerais remercier Virginie Charette pour m'avoir supervisé tout au long de l'écriture et de la révision de cet article. Je lui suis aussi reconnaissant pour son support financier et sa disponibilité lors de mes recherches.

## 2 Espace-temps de Minkowski

Nous n'évoluons pas seulement dans l'espace, mais aussi à travers le temps. Ainsi, il est naturel de vouloir mener des calculs dans un référentiel dont les coordonnées ne sont pas uniquement spatiales. Dans cette section, nous effectuons un survol de l'espace-temps et de la géométrie qui lui est associée.

### 2.1 Espace-temps et cône de lumière

L'espace  $\mathbb{R}^3$  est le modèle souvent employé pour représenter ce que notre œil perçoit. Il est muni d'un système de coordonnées  $[x, y, z]$  issu d'une base avec lequel nous pouvons décrire la position des objets. Lorsque nous ajoutons une coordonnée temporelle  $t$ , nous parlons d'*espace-temps*. Dans ce dernier, un point  $[x, y, z, t]$  est plutôt appelé un *événement* afin de mettre l'accent sur la nouvelle dimension.

Un avantage important de l'espace-temps est qu'il décrit les changements de position au fil du temps. La trajectoire d'un objet ponctuel (c'est-à-dire un objet tenant en un point) illustrée dans l'espace-temps porte le nom de *ligne d'univers*<sup>1</sup>. Une ligne d'univers n'est pas une courbe quelconque, car elle est nécessairement continue et ne peut revenir en arrière dans le temps. Ces restrictions justifient la définition plus formelle ci-dessous :

**Définition 2.1.** Une *ligne d'univers* est une fonction continue  $m : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $I$  étant un intervalle, telle que

$$m(t) = [x(t), y(t), z(t), t].$$

Nous admettons la possibilité que  $m$  ne soit pas différentiable en certains points. Ces points indiquent des changements brusques du vecteur vitesse :

$$m'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t), 1].$$

L'image de  $m$  étant dans un espace à quatre dimensions, nous nous limitons ici à un ou deux axes spatiaux pour sa visualisation. La figure 1 présente un exemple de ligne d'univers dans le plan  $y, z = 0$ .

Un objet important de l'espace-temps est le cône de lumière, mais afin de l'aborder, nous devons passer par les photons. En physique, un *photon* est défini comme étant une particule de lumière<sup>2</sup>. Dans le cadre de cet article, ce terme désignera plutôt la ligne d'univers de la particule par souci de cohérence avec l'univers d'Einstein décrit dans [LD12]. Nous l'abordons à la section 3.

Une particule de lumière se déplace en ligne droite, à une vitesse constante d'environ  $c = 3 \times 10^8$  m/sec, dans le vide. À cette échelle, le mètre n'est pas approprié pour illustrer les lignes d'univers, car les pentes sont trop abruptes. Par conséquent, nous pouvons plutôt utiliser la *seconde-lumière* qui est la distance parcourue par la lumière en une seconde. Ce choix, en gardant la seconde comme

<sup>1</sup>De l'anglais *worldline*.

<sup>2</sup>À condition de considérer la lumière comme un faisceau de particules.



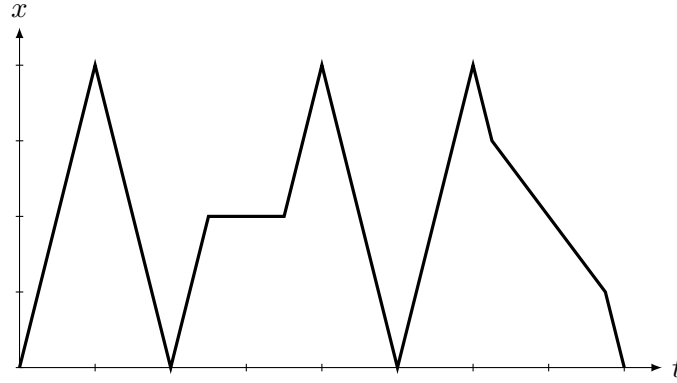


FIGURE 1 – Ma ligne d’univers lorsque je fais des va-et-vient dans un couloir représenté ici par l’axe  $x$ . La vitesse (instantanée) de mon déplacement est donnée par la pente de la courbe. Celle-ci varie selon l’intensité de mes réflexions. Lorsqu’on m’arrête pour discuter, ma ligne d’univers devient parallèle à l’axe  $t$ .

unité temporelle, permet de diminuer la pente des photons à 1. Cette nouvelle échelle est plus pratique en relativité et nous l’utiliserons pour le reste de cette sous-section. Ainsi, si  $\|\cdot\|$  dénote la norme habituelle, nous pouvons dire :

**Définition 2.2.** Un *photon* est une ligne d’univers  $m(t)$  paramétrant une droite de pente 1 : pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $k \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\| [x(t+k), y(t+k), z(t+k)] - [x(t), y(t), z(t)] \| = k.$$

Considérons l’expérience suivante tirée de la section 1.1 de [Cal00]. Supposons que nous plaçons une source ponctuelle à l’origine  $[0, 0, 0]$ . Supposons de plus que celle-ci projette un éclair lumineux au temps  $t = 0$ . Dans cette situation, des particules de lumière sont propulsées partout dans l’espace à une vitesse constante de 1 seconde-lumière/sec. Après  $t$  secondes, toute particule sera à une distance de  $t$  secondes-lumière de l’origine. Cela revient à dire que si  $[x, y, z]$  désigne les coordonnées spatiales d’une telle particule, alors l’équation suivante est satisfaite :

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2. \quad (1)$$

Réciproquement, tout événement  $[x, y, z, t]$  qui satisfait cette équation appartient à un photon, car les particules de lumière ont été propulsées dans toutes les directions. L’équation (1) décrit un cône et, plus particulièrement, un *cône de lumière* dans l’espace-temps. Dans l’expérience précédente, le choix de l’événement initial  $[0, 0, 0, 0]$  était arbitraire : toute autre origine est valable. Plus généralement :

**Définition 2.3.** Un *cône de lumière* est le milieu des événements qui, pour une source  $[x_0, y_0, z_0, t_0] \in \mathbb{R}^4$  donnée, satisfont à l’équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (t - t_0)^2.$$

Un cône de lumière peut aussi être défini de façon équivalente comme l'union de tous les photons passant par un événement donné.

En physique, il est considéré impossible que la vitesse d'un objet quelconque puisse dépasser celle de la lumière. À titre d'exemple, considérons un objet ponctuel  $O$  placé à l'origine de l'espace-temps et illustré à la figure 2. Si nous appliquons ce principe physique, nous en concluons que sa ligne d'univers doit toujours rester à l'intérieur du cône de lumière. Pour cette raison, nous appelons la partie intérieure  $t > 0$  du cône le *futur* de  $O$  et la partie  $t < 0$  le *passé* de  $O$ . Le cône de lumière joue un rôle important dans la causalité des événements, mais le traitement de ce sujet dépasse le cadre de cet article.

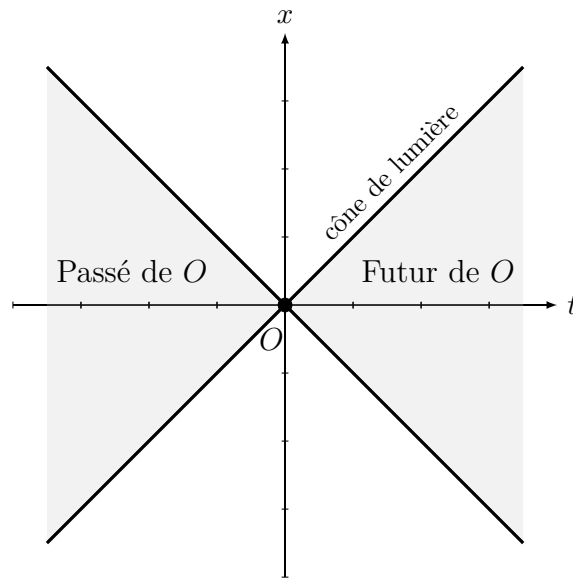


FIGURE 2 – Objet ponctuel  $O$  situé à l'origine de l'espace-temps avec son passé et son futur donnés par le cône de lumière. Une seule dimension spatiale est considérée afin de simplifier l'illustration.

Un postulat important dans la théorie de la relativité est que la vitesse de la lumière est indépendante du choix de référentiel galiléen. Autrement dit, un observateur mesurera toujours  $c$  m/sec peu importe qu'il soit stationnaire ou mobile à vitesse uniforme. Cela entraîne que les transformations habituelles permettant le passage d'un référentiel galiléen à un autre ne sont plus adéquates pour les cônes de lumière. La résolution géométrique de ce problème a mené à l'espace-temps de Minkowski.

## 2.2 Géométrie de Minkowski

Dans cette sous-section, tout vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est sous la forme d'une matrice colonne  $[x_i]_{n \times 1}$ . De plus,  $I_{m \times m}$  désigne la matrice identité de dimension  $m$  et  $0_{m \times p}$  la matrice nulle de dimension  $m \times p$ .

Avec l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , il est possible de parler de la norme d'un vecteur ou de l'angle entre deux vecteurs. L'outil à la base de ces concepts est un *produit scalaire* sur  $\mathbb{R}^n$ . Nous rappelons que c'est une fonction  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant aux trois conditions ci-dessous. Pour tous vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  et scalaires  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

1.  $f$  est une *forme bilinéaire* :  $f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  et  $f(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  ;
2.  $f$  est *symétrique* :  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  ;
3.  $f$  est *définie positive* : si  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ,  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ .

Le produit scalaire habituellement utilisé est le produit scalaire *canonique*  $\bullet$ . Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  exprimés dans la base canonique, il est défini par :

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^T I_{n \times n} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Avec ce dernier, les calculs de distance et d'angle se rapportent à la géométrie d'Euclide (dite *euclidienne*) qui est bien connue et répandue. Si nous voulons une géométrie différente, une option possible est de choisir un autre produit scalaire.

Supposons que les  $n-1$  premières coordonnées d'un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sont spatiales et que la dernière ( $x_n$ ) est temporelle. Un produit scalaire adéquat devrait idéalement distinguer la dernière coordonnée des autres afin de mettre l'accent sur sa dimension temporelle. Ainsi, nous pourrions considérer la forme bilinéaire suivante :

**Définition 2.4.** Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  exprimés dans la base canonique, le *produit intérieur de Minkowski*  $\circ$  est défini par :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} I_{(n-1) \times (n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n.$$

Si nous posons  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , cette équation devient :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2. \quad (2)$$

La forme bilinéaire  $\circ$  est symétrique, mais elle n'est pas définie positive, car selon le choix de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$  peut être positif, nul ou négatif. L'absence de constance sur le signe de  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$  en fait une forme bilinéaire non seulement non définie positive, mais *non définie*. Par conséquent,  $\circ$  n'est pas un produit scalaire selon notre définition et porte plutôt le nom de *produit intérieur*<sup>3,4</sup>. Or, comme le produit scalaire canonique,  $\circ$  est *non dégénérée*, c'est-à-dire que si  $\mathbf{x}$  est non nul, alors il existe  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{x} \circ \mathbf{v} \neq 0$ .

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  muni du produit intérieur de Minkowski est noté  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . L'*espace-temps de Minkowski* désigne habituellement le cas spécifique  $\mathbb{R}^{3,1}$ , mais

<sup>3</sup>Le terme *produit intérieur* vient de l'anglais *inner product*.

<sup>4</sup>Certains auteurs gardent l'appellation *scalaire*.

il n'est ultimement pas fautif d'utiliser cette appellation pour  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  étant donné que nous travaillons avec des coordonnées spatiales et temporelles. Les vecteurs de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  sont divisés en trois types selon le signe de  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$ . Nous dirons d'un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  qu'il est de type :

- *espace* si  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} > 0$  ;
- *lumière* si  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0$  ;
- *temps* si  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} < 0$ .

Il découle de (2) que  $\mathbf{x}$  est de type lumière si et seulement si l'équation suivante est vérifiée :

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = x_n^2.$$

La forme de cette équation implique que l'ensemble des vecteurs de type lumière est un cône. Si nous posons  $n = 4$ , nous retrouvons le cône de lumière (1) à l'origine de l'espace-temps. Les vecteurs de type espace sont à l'extérieur du cône et ceux de type temps à l'intérieur.

Nous pouvons calculer des distances et des angles avec le produit intérieur de Minkowski. Ces calculs s'inscrivent dans une nouvelle géométrie que nous appelons la *géométrie de Minkowski* ou *géométrie lorentzienne*. Avant de terminer cette section, nous en présentons quelques particularités. Toute personne voulant creuser davantage le sujet peut se référer à la section 2.3 de [Cal00].

### 2.2.1 Norme et intervalle

De façon analogue à la géométrie euclidienne, [Cal00] définit la nouvelle norme comme suit :

**Définition 2.5.** Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ . La *norme de Minkowski* de  $\mathbf{x}$  est  $\|\mathbf{x}\|_{Min} = \sqrt{|\mathbf{x} \circ \mathbf{x}|}$ .

Notons que malgré son appellation,  $\|\cdot\|_{Min}$  n'est pas une norme à proprement parler. Cela est dû au fait qu'elle ne respecte pas l'inégalité du triangle, c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  tels que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{Min} > \|\mathbf{x}\|_{Min} + \|\mathbf{y}\|_{Min}.$$

Un exemple simple est  $\mathbf{x} = [1, 1]^T$  et  $\mathbf{y} = [-1, 1]^T$  dans  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Ces deux vecteurs sont de type lumière et ont une norme nulle, mais ce n'est pas le cas de  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = [0, 2]^T$  qui est de type temps. Bref, la norme de Minkowski ne correspond pas à notre notion intuitive de longueur.

En géométrie euclidienne, les vecteurs de même norme  $k \in \mathbb{R}^+$  forment la sphère centrée à l'origine de rayon  $k$ . En géométrie lorentzienne, un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  a une norme égale à  $k$  si et seulement si :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = \pm k^2.$$

Si  $n = 2$ ,  $x = x_1$  et  $y = x_2$ , nous obtenons les équations ci-dessous associées à des hyperboles :

$$x^2 - y^2 = k^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = -k^2.$$

La figure 3 illustre quelques exemples de ces courbes. Dans le cas général, les vecteurs de même norme forment une *hyperboloïde*.

Nous pouvons aussi définir la « distance » entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  de la façon suivante :

**Définition 2.6.** Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ . L'*intervalle* entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_{Min}$ .

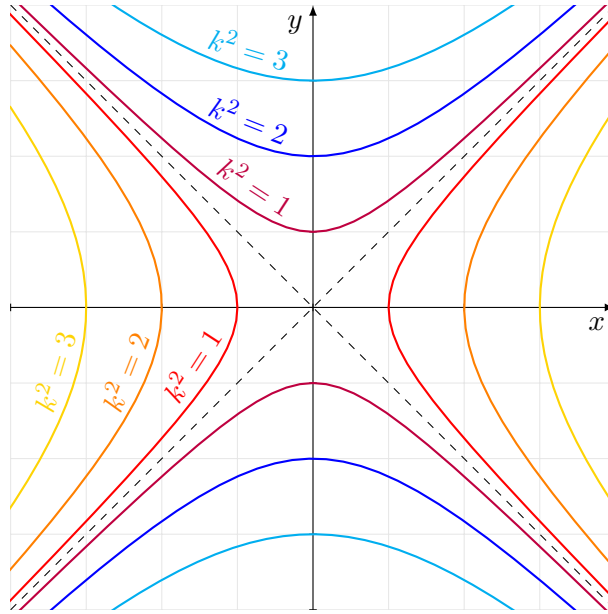


FIGURE 3 – Courbes  $x^2 - y^2 = k^2$  (rouge à jaune) et  $x^2 - y^2 = -k^2$  (mauve à cyan) pour quelques valeurs de  $k^2$ . Pour un  $k \in \mathbb{R}^+$  donné, ces deux hyperboles identifient tous les vecteurs dont la norme de Minkowski est  $k$ .

### 2.2.2 Isométries et groupe $O(n-1,1)$

Dans  $\mathbb{R}^n$ , nous pouvons déduire une métrique  $d$  de la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  en posant  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ . Cette dernière fait de  $\mathbb{R}^n$  un exemple d'*espace métrique*. Dans le contexte d'un espace métrique, nous pouvons définir la notion d'isométrie qui est une transformation préservant les distances :

**Définition 2.7.** Soit  $X$  un ensemble muni d'une métrique  $d$ . Une *isométrie* de  $(X, d)$  est une fonction  $f : X \rightarrow X$  où, pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ ,  $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

La norme de Minkowski n'étant pas une norme, l'intervalle n'est donc pas une métrique de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . Dans cet espace, le terme « isométrie » est plutôt employé pour décrire les transformations suivantes :

**Définition 2.8.** Une *isométrie* de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  est une fonction  $f : \mathbb{R}^{n-1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1,1}$  où, pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ ,

$$(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \circ (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Il est bien connu que les isométries de  $\mathbb{R}^n$  sont des compositions de translations, de réflexions et de rotations. Partant de cela, il est possible de trouver des équivalents à ces trois transformations de base pour  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . Une translation sur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  consiste à lui additionner un vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  et a le même effet qu'une translation de  $\mathbb{R}^n$ . Si la coordonnée temporelle  $x_n$  n'est pas impliquée dans la transformation, les réflexions et les rotations reviennent aussi à celles de la géométrie euclidienne. Sinon, nous parlons plutôt de *réflexion hyperbolique* ou de *rotation hyperbolique*<sup>5</sup>.

Toute réflexion ou rotation sur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$  revient à une application linéaire. L'image d'une telle application est de la forme  $A\mathbf{x}$ , où  $A$  est une matrice de dimension  $n \times n$  avec coefficients dans  $\mathbb{R}$ . La notation  $M_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices possédant ces caractéristiques. Les réflexions et les rotations sont inversibles, impliquant de plus que  $A$  est inversible. Nous rappelons que l'ensemble des matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  inversibles forment un groupe pour la multiplication matricielle. Ce dernier s'appelle le *groupe général linéaire* d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}$  et est noté  $GL_n(\mathbb{R})$ . Or, toute application linéaire inversible n'est pas nécessairement une isométrie. Ce qui distingue les réflexions et les rotations, c'est qu'elles *préservent* le produit intérieur de Minkowski. Cela veut dire que, pour une matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  associée à ce type de transformation,  $A\mathbf{x} \circ A\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$  pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ .

Nous en arrivons donc à la définition et à la proposition suivantes qui complètent la sous-section :

**Définition 2.9.** Le *groupe pseudo-orthogonal* de type  $(n-1,1)$ , noté  $O(n-1,1)$ , est l'ensemble  $\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ préserve } \circ\}$ . L'opération du groupe est la multiplication matricielle.

**Proposition 2.10.** Une fonction  $t : \mathbb{R}^{n-1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1,1}$  est une isométrie de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  si et seulement si :

$$\mathbf{x} \mapsto t(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \text{où } A \in O(n-1,1) \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1,1}.$$

### 3 Univers d'Einstein

Un autre espace dans lequel nous retrouvons des photons et des cônes de lumière est l'univers d'Einstein. Quoique cette appellation peut effrayer, l'univers d'Einstein n'est à la base qu'un espace projectif dans  $\mathbb{R}^n$  avec quelques conditions.

<sup>5</sup>Parfois appelée *transformation de Lorentz*. Elle préserve le cône de lumière d'un référentiel galiléen à un autre.

De plus, il présente plusieurs similarités avec l'espace-temps de Minkowski qui nous est maintenant familier. Dans cette section, nous définissons cet univers et en présentons quelques visualisations.

### 3.1 Définitions

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+2}$  ( $n \geq 2$ ) dont les vecteurs  $\mathbf{x}$  sont représentés par des matrices colonnes  $[x_i]_{(n+2) \times 1}$ . De façon analogue à la section 2.2, nous allons munir cet espace d'un produit intérieur  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  non défini et non dégénéré. Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+2}$  exprimés dans la base canonique, nous posons :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+2} y_{n+2}.$$

Si  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , alors l'expression devient :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2. \quad (3)$$

L'espace  $\mathbb{R}^{n+2}$  muni du produit intérieur  $\langle, \rangle$  est noté  $\mathbb{R}^{n,2}$ . De même, le groupe des matrices  $M \in GL_{n+2}(\mathbb{R})$  préservant  $\langle, \rangle$  est noté  $O(n,2)$ .

Selon que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  soit positif, nul ou négatif, nous dirons du vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,2}$  qu'il est de type *espace*, *lumière* ou *temps*, respectivement, comme dans l'espace-temps de Minkowski. Cette terminologie nous mène à la définition suivante :

**Définition 3.1.** Le *cône de lumière*  $\mathbf{N}^{n,2}$  est l'ensemble des vecteurs de type lumière de  $\mathbb{R}^{n,2}$ .

À ce moment, nous avons presque décrit l'univers d'Einstein, car ce dernier est essentiellement  $\mathbf{N}^{n,2}$ . La différence est qu'à la place de travailler avec des vecteurs, nous travaillons plutôt avec des objets associables aux droites passant par l'origine. Pour créer de tels objets, nous regroupons les vecteurs de même direction dans une seule classe d'équivalence.

**Définition 3.2.** Deux vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,2}$  sont en *relation de colinéarité*, noté  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ , si et seulement s'il existe un scalaire  $k \in \mathbb{R}_*$  tel que  $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$ . De plus, si  $k > 0$ , alors ils sont en *relation de colinéarité positive*, noté  $\mathbf{x} \sim_+ \mathbf{y}$ .

Les relations  $\sim$  et  $\sim_+$  sont des relations d'équivalence. Rappelons maintenant les concepts de classe d'équivalence et d'ensemble quotient :

*Rappel .* Soient  $E$  un ensemble et  $\equiv$  une relation d'équivalence. La *classe d'équivalence* d'un élément  $x \in E$  est  $\tilde{x} = \{y \in E \mid x \equiv y\}$ . L'ensemble des classes d'équivalence de  $E$  est appelé l'*ensemble quotient* de  $E$  par  $\equiv$  et est noté  $E/\equiv$ .

L'origine  $\mathbf{0}$  est l'unique point singulier de  $\mathbf{N}^{n,2}$ , c'est-à-dire l'unique point où le cône de lumière n'est pas différentiable. Par conséquent, il nous est préférable de plutôt considérer  $\mathbf{N}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}\}$  avant de passer au quotient par  $\sim$ .

**Définition 3.3.** Soit  $V$  un espace vectoriel. La *projectivisation* de  $V$ , notée  $\mathbb{P}V$ , est l'ensemble quotient de  $V \setminus \{\mathbf{0}\}$  par la relation d'équivalence  $\sim$ .

La fonction  $\mathbb{P} : V \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{P}V$ , envoyant chaque élément  $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$  vers sa classe d'équivalence pour  $\sim$ , porte aussi le nom de projectivisation.

**Définition 3.4.** L'univers d'Einstein issu de  $\mathbb{R}^{n,2}$ , noté  $Ein^{n-1,1}$ , est  $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n,2} = (\mathbb{R}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$ .

Si le quotient est plutôt effectué avec la relation de colinéarité positive  $\sim_+$ , nous obtenons un revêtement de  $Ein^{n-1,1}$ . La notion de revêtement n'est pas importante pour cet article et nous donnons la définition suivante pour des fins de visualisation seulement :

**Définition 3.5.** Le revêtement double de l'univers d'Einstein, noté  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$ , est  $(\mathbb{R}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim_+$ .

Nous poussons l'idée que les éléments de  $Ein^{n-1,1}$  peuvent être interprétés comme étant des droites. Cela fait de l'univers d'Einstein un *espace projectif*. Ce concept s'inspire de la projection perspective dont le fonctionnement est similaire à la vision humaine. Lorsque nous regardons dans une direction donnée, nous ne voyons que l'objet le plus près de nous : les objets derrière ce dernier nous sont invisibles. Ainsi, l'information visuelle de la direction est résumée par l'objet en question. Le quotient par  $\sim$  donne un effet semblable dans un contexte géométrique. Les coordonnées d'un espace projectif portent le nom de *coordonnées homogènes*. Celles-ci sont habituellement écrites avec des deux-points « : » entre les valeurs.

Nous terminons cette sous-section avec deux objets importants de  $Ein^{n-1,1}$  : les photons et les cônes de lumière. Ces derniers possèdent des traits communs avec les objets de même nom dans l'espace-temps. Ces traits sont mis en évidence à la section 3.2.

**Définition 3.6.** Un *photon*  $\phi \subseteq Ein^{n-1,1}$  est la projectivisation d'un plan  $P$  de  $\mathbb{R}^{n,2}$ , où chaque vecteur  $\mathbf{x} \in P$  est de type lumière.

Autrement dit, considérons deux vecteurs linéairement indépendants  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,2}$  tels que pour tous scalaires  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \rangle = 0.$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs,

$$P = \{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

forme un plan de  $\mathbb{R}^{n,2}$  et  $\phi = \mathbb{P}P$  est un exemple de photon.

**Définition 3.7.** Le *cône de lumière* d'un élément  $\mathbf{x} \in Ein^{n-1,1}$ , noté  $L(\mathbf{x})$ , est l'union de tous les photons  $\phi$ , où  $\mathbf{x} \in \phi$ .

Une définition équivalente et parfois plus pratique d'un cône de lumière est donnée dans [LD12]. Nous la présentons sous la forme d'un lemme :

**Lemme 3.8.** Pour tout  $\mathbf{x} \in Ein^{n-1,1}$ ,  $L(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in Ein^{n-1,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$ .



### 3.2 Visualisation de l'univers d'Einstein

La condition  $n \geq 2$  sur  $\mathbb{R}^{n,2}$  entraîne que les éléments de l'univers d'Einstein ont au moins quatre coordonnées. Malheureusement, il est plutôt difficile de visualiser un espace de dimension supérieure à trois. Or, la dimension « réelle » de  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  n'est pas  $n+2$ , mais bien  $n$ . Ce fait est mis en évidence par la proposition 3.10. Avant de l'énoncer, nous rappelons que la notation  $S^{n-1}$  désigne la sphère unitaire de  $\mathbb{R}^n$ , soit

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

De plus, nous avons besoin de la relation d'équivalence suivante :

**Définition 3.9.** Deux vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,2}$  sont en *relation antipodale*, noté  $\mathbf{x} \pm \mathbf{y}$ , si et seulement si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  ou  $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ .

Voici maintenant le résultat. Pour une démonstration intuitive de ce dernier, le lecteur peut se référer à la section 2.2.1 de [LD12] :

**Proposition 3.10.** *L'espace  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  est homéomorphe à  $(S^{n-1} \times S^1)/\pm$  et  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  est homéomorphe à  $S^{n-1} \times S^1$ .*

D'une certaine façon, nous pouvons simplement retenir que  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  et  $S^{n-1} \times S^1$  sont le « même » espace. Cette interprétation est satisfaisante pour la section courante et la proposition 3.10 n'est revisitée que brièvement à la section 4. Notons toutefois que les espaces impliqués ici sont plus qu'homéomorphes et que la vérité implique des notions qui dépassent le niveau de l'article.

Quoique  $S^{n-1}$  est un ensemble de points dans  $\mathbb{R}^n$ , seulement  $n-1$  paramètres sont suffisants pour le décrire. Si nous prenons comme exemple le cercle

$$S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

alors  $x_1 = \cos\theta$  et  $x_2 = \sin\theta$ , où  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Ainsi, le paramètre  $\theta$  identifie uniquement les points et fait de  $S^1$  un espace de dimension un. Si nous choisissons plutôt la sphère

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

alors tout point  $\mathbf{x} \in S^2$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \end{bmatrix}^T, \quad \text{où } \psi \in [0, \pi] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi).$$

Nous reconnaissons les formules associées au système de coordonnées sphériques. Dans le cas  $S^{n-1} \times S^1$  de la proposition, le nombre de paramètres est égal à  $(n-1)+1 = n$  d'où la dimension « réelle » de  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$ . Nous pouvons raisonner ce résultat en réalisant que les éléments de  $\widehat{Ein}^{n-1,1}$  ne sont pas seulement des vecteurs de  $\mathbb{R}^{n,2}$ . En effet, ceux-ci doivent être de type lumière et sont regroupés en « demi-droites » par la relation d'équivalence  $\sim_+$ . Ces deux conditions diminuent d'une certaine façon la dimension.

Pour le reste de cette sous-section, nous nous intéressons à la visualisation de  $S^{n-1} \times S^1$  dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ . Entre autres, nous illustrons des photons et des cônes de lumière dans ce modèle.

### 3.2.1 Visualisation de $S^1 \times S^1$

Nous savons que tout point  $\mathbf{x} \in S^1 \times S^1$  est de la forme

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}^T, \quad \text{où } \theta, \varphi \in [0, 2\pi). \quad (4)$$

Il peut en être de même pour tout vecteur de  $\widehat{Ein}^{1,1}$ , mais ce fait n'est pas immédiat. Afin de le voir, observons que  $\mathbf{y} \in \widehat{Ein}^{1,1}$  implique que  $\mathbf{y}$  est de type lumière. Il suit de l'expression (3) du produit intérieur  $\langle, \rangle$  que :

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 + y_4^2.$$

L'espace  $\widehat{Ein}^{1,1}$  étant projectifié, la définition 3.3 nous informe que l'origine  $\mathbf{0}$  n'est pas incluse. Par conséquent, les deux termes de cette égalité sont non nuls et la quantité

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{y_3^2 + y_4^2}}$$

est réelle et non nulle. Rappelons de plus que le revêtement double  $\widehat{Ein}^{1,1}$  est un espace quotienté par la relation de colinéarité positive  $\sim_+$ . Le vecteur  $\mathbf{y}$  est donc équivalent à tout vecteur  $\mathbf{z} \in \widehat{Ein}^{1,1}$ , où  $\mathbf{z} = k\mathbf{y}$  et  $k \in \mathbb{R}_*^+$ . Un candidat,  $(1/\nu)\mathbf{y}$ , se démarque des autres à la lumière du fait suivant :

$$\left(\frac{y_1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\nu}\right)^2 = \left(\frac{y_3}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{y_4}{\nu}\right)^2 = 1.$$

De cette équation, nous concluons que le vecteur  $(1/\nu)\mathbf{y}$  a bien la forme identifiée en (4). Ainsi, en plus d'avoir fourni des arguments à la proposition 3.10, nous avons trouvé une façon d'associer un vecteur quelconque de  $\widehat{Ein}^{1,1}$  à un point de  $S^1 \times S^1$  afin de le visualiser.

Pour ce qui est de la représentation de  $S^1 \times S^1$ , il est possible d'illustrer cet ensemble par un plan  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ , où  $\theta$  et  $\varphi$  occupent les deux axes. Si nous considérerions plutôt  $(S^1 \times S^1)/\pm$ , alors un des deux paramètres devrait être limité à  $[0, \pi)$ . Sinon, nous afficherions à la fois un point  $\mathbf{x} \in (S^1 \times S^1)/\pm$  et son antipode  $-\mathbf{x}$  qui sont équivalents en vertu de la relation  $\pm$ . L'identification ci-dessous clarifie la situation :

$$\mathbf{x} \pm -\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \pi) \\ \sin(\theta + \pi) \\ \cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\varphi + \pi) \end{bmatrix}.$$

Le plan  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$  présente le désavantage de ne pas rendre la relation antipodale visuellement claire. De plus, il nous serait intéressant d'avoir une représentation plus fidèle à la nature cyclique de  $S^1 \times S^1$ . C'est pourquoi, comme [LD12], nous préférons plutôt utiliser un *tore* ou beigne dans le langage familier.

Cet objet est une surface de révolution de rayon  $R$  issue d'un cercle de rayon  $r \leq R$  et contient bien deux copies de  $S^1$ . Nous utiliserons la paramétrisation donnée en (5) pour passer de  $S^1 \times S^1$  au tore. Pour les figures de cet article, les rayons choisis sont  $R = 2$  et  $r = 1$  :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

La figure 4 montre le tore associé à  $S^1 \times S^1$  et identifie  $R$ ,  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sur ce dernier. Un vecteur  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{1,1}$  et son antipode par la relation  $\pm$  sont aussi présents. Si nous voulions illustrer  $(S^1 \times S^1)/\pm$ , la limitation de  $\theta$  ou de  $\varphi$  à l'intervalle  $[0, \pi)$  nous laisserait avec un demi-tore.

### 3.2.2 Visualisation de $S^2 \times S^1$

Les paramétrisations du cercle  $S^1$  et de la sphère dans l'espace  $S^2$  ont déjà été discutées. Ainsi, nous pouvons déduire que tout point  $\mathbf{x} \in S^2 \times S^1$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{où } \psi \in [0, \pi] \text{ et } \varphi, \theta \in [0, 2\pi). \quad (6)$$

Nous choisissons cette paramétrisation en particulier dû à une convention concernant le point  $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  ; les autres paramétrisations possibles n'en sont pas moins valides. Dans tous les cas, nous pouvons montrer que tout vecteur  $\mathbf{y} \in \widehat{Ein}^{2,1}$  correspond aussi à la forme (6) moyennant une multiplication scalaire appropriée. La démarche à suivre est identique à celle pour  $\widehat{Ein}^{1,1}$  qui est présentée à la sous-section 3.2.1.

Nous pourrions représenter  $S^2 \times S^1$  par un espace avec  $(\psi, \varphi, \theta)$  comme système de coordonnées. Or, ici aussi, nous préférons un modèle qui facilite la visualisation des identifications issues de  $\pm$  :

$$\mathbf{x} \pm -\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\cos\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi \\ -\sin\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi - \psi) \\ \sin(\pi - \psi)\cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\pi - \psi)\sin(\varphi + \pi) \\ \sin(\theta + \pi) \\ \cos(\theta + \pi) \end{bmatrix}.$$

L'idée utilisée par [LD12] est de ramener  $S^2$  à un *disque* ou « cercle plein » de rayon  $\pi$ , soit

$$\pi\mathcal{D}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \pi\}.$$

La transformation employée est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\varphi \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} \psi\cos\varphi & \psi\sin\varphi \end{bmatrix}^T.$$

Puisque  $\psi \in [0, \pi]$ , ce dernier est interprété comme un rayon dans  $\pi\mathcal{D}^2$ . Le paramètre  $\varphi$ , quant à lui, devient un angle de rotation. Cette transformation est correctement définie, sauf lorsque  $\psi = \pi$ , soit au point  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ . Dans ce cas,  $\sin\psi = 0$  et il est impossible de déterminer la valeur de  $\varphi$  associée au rayon  $\pi$ . Nous ferons donc correspondre l'image de ce point à la frontière du disque. Il arrive aussi que  $\sin\psi = 0$  si  $\psi = 0$ , mais le rayon nul entraîne que l'angle  $\varphi$  est sans importance : notre image est au centre du disque.

Si nous interprétons le troisième paramètre  $\theta \in [0, 2\pi)$  comme étant une hauteur, nous en arrivons à la paramétrisation suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \psi\cos\varphi \\ \psi\sin\varphi \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Le solide résultant est un cylindre qui sera notre modèle pour  $S^2 \times S^1$ . La figure 5 affiche le cylindre et identifie  $\psi$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  sur ce dernier. Un vecteur  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{2,1}$  et son antipode par la relation  $\pm$  sont aussi présents. Si nous voulions plutôt afficher  $(S^2 \times S^1)/\pm$ , le paramètre  $\theta$  est celui que nous limiterions à  $[0, \pi)$ . Dans ce cas, nous obtiendrions seulement la moitié inférieure du cylindre qui est identifiable sur la figure par la différence de coloration.

### 3.2.3 Visualisation de photons

Nous rappelons qu'un photon est la projectivisation d'un plan où chaque vecteur est de type lumière. Posons  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subseteq \mathbb{R}^{n,2}$  la base d'un tel plan et  $\phi \subseteq Ein^{n-1,1}$  le photon qui lui est associé. Ainsi, pour tout  $\mathbf{x} \in \phi$ ,

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Or, puisque nous sommes dans  $Ein^{n-1,1}$ , un espace quotient,  $\mathbf{x}$  est un représentant d'une classe d'équivalence. En vertu de la définition de  $\sim$ , ce représentant peut être changé par un multiple scalaire non nul de  $\mathbf{x}$ . Par exemple, si  $\alpha \neq 0$ , alors :

$$\mathbf{x} \sim \frac{1}{\alpha}\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v} = \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad \text{où } t = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}.$$

Si  $\alpha = 0$ , alors  $\mathbf{x} = \mathbf{v}$  tout simplement. Par conséquent, nous pouvons redéfinir  $\phi$ , de façon équivalente, par :

$$\phi = \{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{v}\}.$$

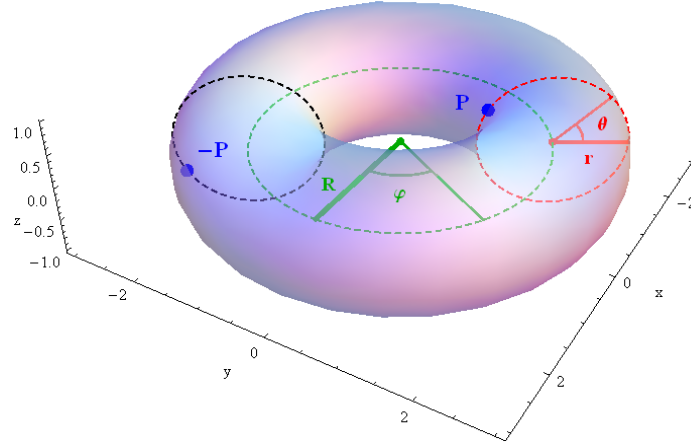


FIGURE 4 – Tore modélisant  $S^1 \times S^1$  avec les rayons  $R = 2$  et  $r = 1$  et les angles  $\theta$  et  $\varphi$  identifiés. Les deux points bleus correspondent à un vecteur quelconque  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{1,1}$  et son antipode  $-\mathbf{P}$  lorsqu'ils sont affichés sur le tore. Ces derniers montrent que la relation antipodale du revêtement double, quoique plus claire comparativement au plan, n'est pas conservée.

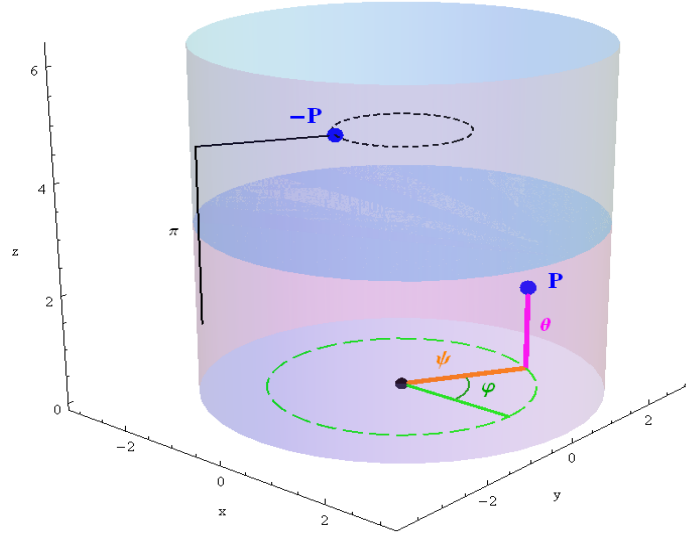


FIGURE 5 – Cylindre modélisant  $S^2 \times S^1$  avec le rayon  $\psi$ , l'angle  $\varphi$  et la hauteur  $\theta$  identifiés. Les deux points bleus correspondent à un vecteur quelconque  $\mathbf{P} \in \widehat{Ein}^{2,1}$  et son antipode  $-\mathbf{P}$  lorsqu'ils sont affichés dans le cylindre. Ces derniers montrent que la relation antipodale n'est pas conservée. La moitié inférieure rosée du cylindre représente  $(S^2 \times S^1)/\pm$  et, conséquemment,  $Ein^{2,1}$ . La restriction de  $\theta$  à l'intervalle  $[0, \pi)$  permet d'isoler cette moitié.

C'est cette forme qui est habituellement utilisée pour décrire les photons de l'univers d'Einstein. Avec elle, nous pouvons voir qu'un photon est, à un détail près, une droite. Cette observation nous permet d'établir un lien supplémentaire avec l'espace-temps de Minkowski dont les photons sont des droites. La différence ici est l'ajout de  $\{\mathbf{v}\}$  qui approche le comportement de  $\phi$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Les figures 6 à 8 contiennent des exemples de photons dans  $S^1 \times S^1$  et  $S^2 \times S^1$ . Nous encourageons le lecteur à tenter d'expliquer leur forme en appliquant les connaissances des dernières sous-sections. Cet exercice constitue une excellente occasion de se familiariser avec les représentations de l'univers d'Einstein.

### 3.2.4 Visualisation des cônes de lumière

Soit un vecteur  $\mathbf{x} \in \text{Ein}^{n-1,1}$ . La définition 3.7 présente le cône de lumière  $L(\mathbf{x})$  comme l'union de tous les photons passant par  $\mathbf{x}$ . Cependant, cette définition ne nous est utile que si nous avons une bonne connaissance des photons de  $\text{Ein}^{n-1,1}$ . Cela est le cas lorsque  $n = 2$ , car les photons sur  $S^1 \times S^1$  n'ont essentiellement que deux formes ou orientations. Pour élaborer, tout photon sur le tore admet une reparamétrisation où les angles  $\theta$  et  $\varphi$  varient au même rythme. Ainsi, seulement deux scénarios peuvent se présenter : ces angles évoluent dans la même direction ou dans des directions opposées. La figure 9 présente graphiquement les deux orientations. Pour chacune d'entre elles, il n'y a qu'un seul photon qui passe par notre vecteur  $\mathbf{x}$ . En conclusion,  $L(\mathbf{x})$  correspond simplement à l'union des deux photons qui s'intersectent en  $\mathbf{x}$ . La figure 10 montre un exemple de cône de lumière sur le tore.

Nous avons vu que les photons dans  $S^2 \times S^1$  prennent des formes plus variées. Par conséquent, la définition 3.7 n'est pas très pratique lorsque  $n = 3$  et il est préférable d'avoir recours au lemme 3.8 dans cette situation. En vertu de ce lemme, trouver le cône de lumière  $L(\mathbf{x})$  revient à résoudre l'équation  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  par rapport à  $\mathbf{y} \in \text{Ein}^{2,1}$ . Cette tâche n'est pas toujours facile et son traitement déborde du cadre de l'article. Nous présentons un exemple de cône de lumière dans le cylindre à la figure 11.

## 4 Compactification

Plusieurs similitudes entre l'espace-temps de Minkowski et l'univers d'Einstein ont été explicitées ou laissées à l'œil attentif du lecteur dans la section précédente. Il est ainsi naturel de se demander quelle est la véritable nature de leur relation. Nous nous limitons ici à une réponse partielle et des explications incomplètes, mais ces dernières devraient tout de même donner une idée générale de la situation. La réponse partielle est la suivante :

**Proposition 4.1.** *L'univers d'Einstein  $\text{Ein}^{n-1,1}$  est une compactification de l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ .*

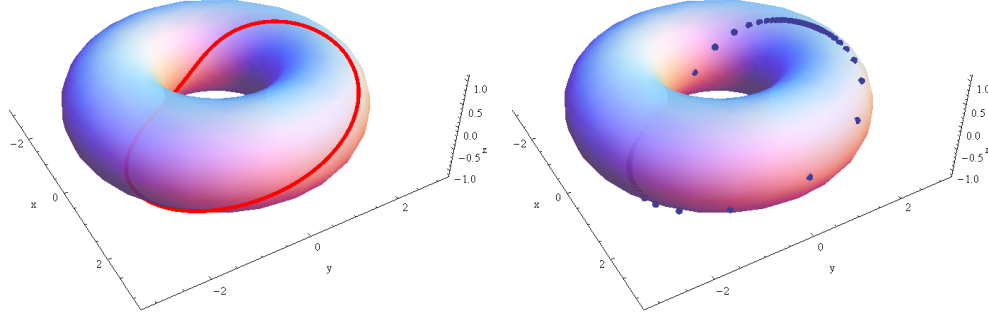


FIGURE 6 – Photon  $[1:t:1:t]^T \cup [0:1:0:1]^T$  de  $Ein^{1,1}$  représenté dans  $S^1 \times S^1$ . Dans l'image de gauche, nous prenons toutes les valeurs  $t \in \mathbb{R}$ . Dans celle de droite, nous prenons des valeurs discrètes de  $t$  par bond de  $1/2$ . Les points d'accumulation du photon correspondent aux limites  $t \rightarrow \pm\infty$ , soit  $[0:1:0:1]^T$ .

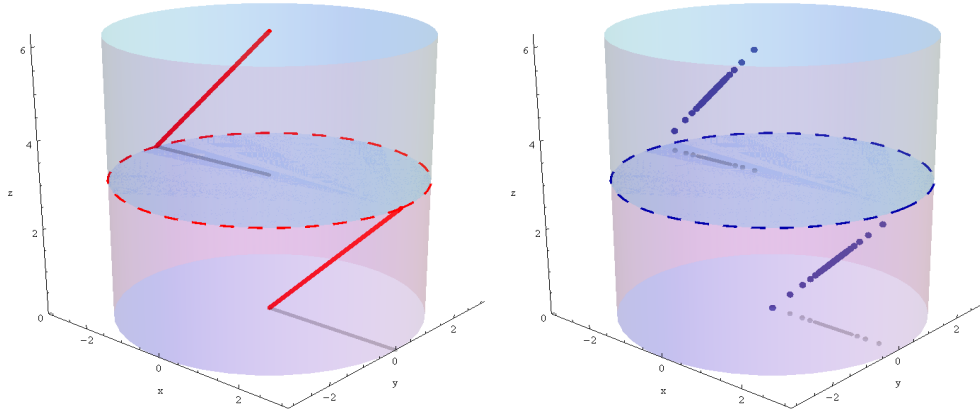


FIGURE 7 – Photon  $[1:t:0:t:1]^T \cup [0:1:0:1:0]^T$  de  $Ein^{2,1}$  représenté dans  $S^2 \times S^1$ . Dans l'image de gauche, nous prenons toutes les valeurs  $t \in \mathbb{R}$ . Dans celle de droite, nous prenons des valeurs discrètes de  $t$  par bond de  $1/2$ . Les limites  $t \rightarrow \pm\infty$  correspondent au point d'accumulation  $[0:1:0:1:0]^T$ . Le cercle pointillé indique l'atteinte de la frontière du disque de hauteur  $\pi$  par le photon. Puisque nous avons établi que cette frontière correspond à un unique point de  $\widehat{Ein}^{2,1}$ , nous l'avons colorée en entier. Des ombres grises ont été ajoutées à la figure afin d'améliorer la visualisation en trois dimensions.

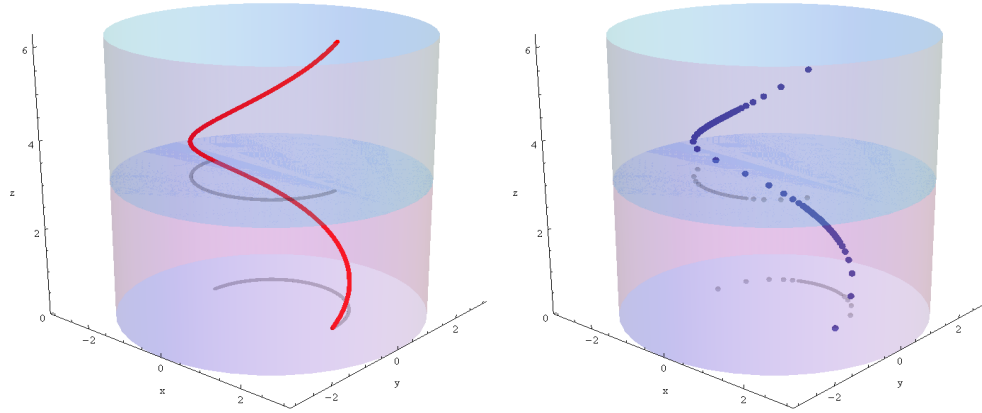


FIGURE 8 – Photon  $[0 : 1 : t : t : 1]^T \cup [0 : 0 : 1 : 1 : 0]^T$  de  $Ein^{2,1}$  représenté dans  $S^2 \times S^1$ . Dans l'image de gauche, nous prenons toutes les valeurs  $t \in \mathbb{R}$ . Dans celle de droite, nous prenons des valeurs discrètes de  $t$  par bond de  $1/2$ . Les limites  $t \rightarrow \pm\infty$  correspondent au point d'accumulation  $[0 : 0 : 1 : 1 : 0]^T$ . Le cylindre, étant utilisé comme solide plutôt que surface, permet des photons d'apparences plus variées que le tore. Des ombres grises ont été ajoutées à la figure afin d'améliorer la visualisation en trois dimensions.

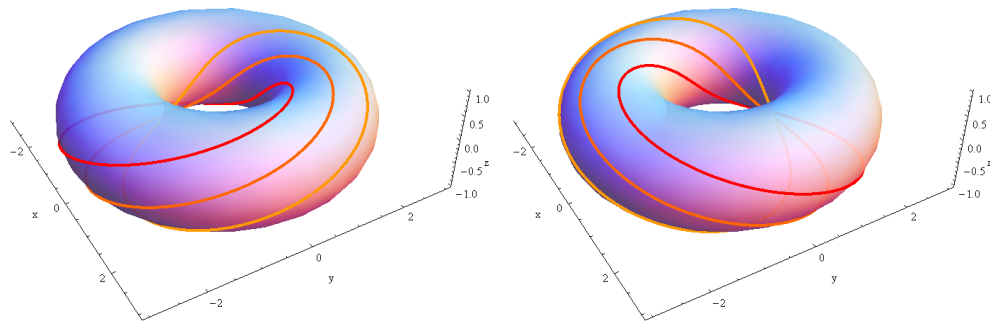


FIGURE 9 – Deux orientations possibles d'un photon de  $Ein^{1,1}$  sur le tore. Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  évoluent dans la même direction pour les photons de l'image de gauche et dans des directions opposées pour ceux de l'image de droite.



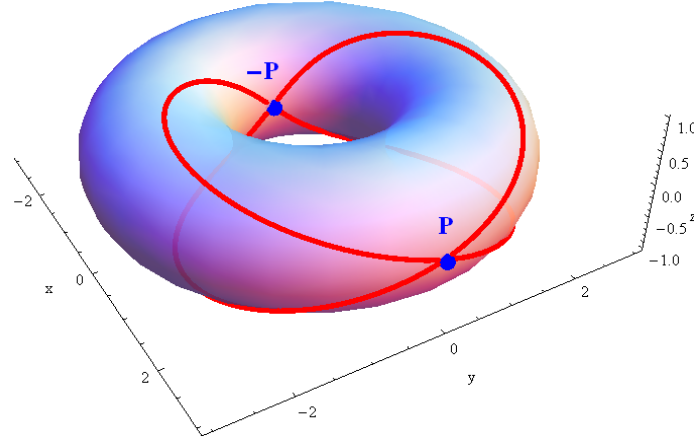


FIGURE 10 – Cône de lumière au point  $\mathbf{P}$  associé au vecteur  $[1:0:1:0]^T$  de  $Ein^{1,1}$ . Ce cône n'est effectivement composé que de deux photons d'orientations différentes. Sa forme n'est pas sans rappeler celle des cônes dans le plan. Notons, de plus, qu'il passe par l'antipode  $-\mathbf{P}$  et est aussi son cône de lumière.

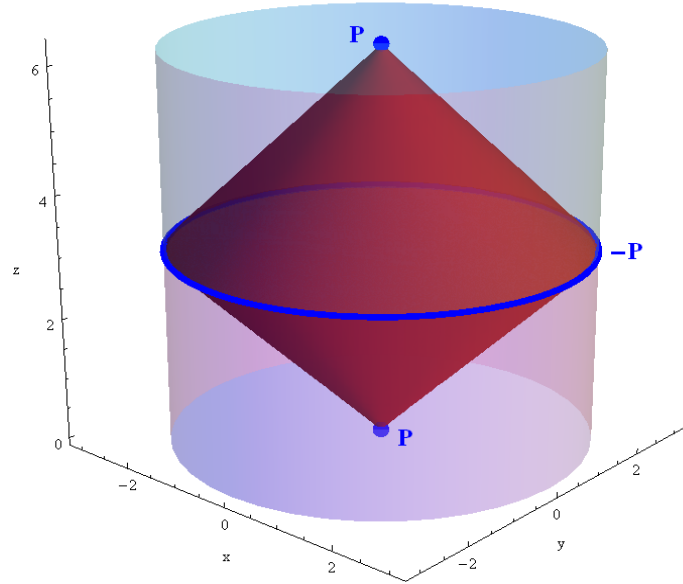


FIGURE 11 – Cône de lumière au point  $\mathbf{P}$  associé au vecteur  $\mathbf{x} = [1:0:0:0:1]^T$  de  $Ein^{2,1}$ . L'équation  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  se résout facilement et donne la condition  $y_1 - y_5 = 0$  sur  $\mathbf{y} \in Ein^{2,1}$ . En vertu de la paramétrisation (6), les points qui composent le cône sont ceux où  $\cos\psi = \cos\theta$ . En plus de son apparence inversée par rapport aux cônes conventionnels, il passe par l'antipode  $-\mathbf{P}$  et est aussi son cône de lumière.

Cela nous dit essentiellement que l'univers d'Einstein est un compact et une « extension » de l'espace-temps de Minkowski. La première affirmation est une conséquence de la proposition 3.10. En effet, affirmer que  $Ein^{n-1,1}$  est homéomorphe à  $(S^{n-1} \times S^1)/\pm$  implique qu'il existe une bijection continue  $h$ , du premier ensemble au deuxième, dont l'inverse  $h^{-1}$  est aussi continue. Puisque les sphères  $S^m$  sont compactes, le produit cartésien  $S^{n-1} \times S^1$  l'est aussi. Le passage au quotient par la relation d'équivalence  $\pm$  préserve la compacité. Finalement, l'image d'un compact par une fonction continue étant compacte, la fonction  $h^{-1}$  nous mène au résultat. Ce sont là les grandes étapes du raisonnement et nous ne désirons pas aller plus loin dans la démonstration de la proposition 4.1. Le reste de la section est consacré à donner une conception simplifiée de ce résultat.

Dans  $\mathbb{R}^n$ , tout ensemble compact ne s'étend pas à l'infini : il est borné. Notre expérience avec les ensembles  $(S^{n-1} \times S^1)/\pm$  nous montre qu'ils sont aussi bornés. L'illustration des photons et des cônes de lumière dans ceux-ci est intéressante pour la raison que leurs points d'accumulation sont inclus. Pourtant, ces points correspondent à des limites à l'infini. Par comparaison, il est impossible de considérer les points infinis de l'espace-temps de Minkowski qui n'est pas borné.

C'est la lacune mentionnée ci-dessus qui permet à l'univers d'Einstein de rayonner : ce dernier « étend » l'espace-temps de Minkowski à l'infini. Un exemple particulièrement parlant pour illustrer cette réalité sont les photons. Rappelons qu'un photon  $\phi$  de  $Ein^{n-1,1}$ , qui est à la base un plan, peut être réécrit de la façon suivante :

$$\phi = \{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{v}\}.$$

La première partie de cette union est la donnée d'une droite qui est de la forme d'un photon dans  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ . Le point  $\mathbf{v}$  ne sera jamais atteint par la droite, mais cette dernière peut s'en approcher autant que possible lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Tout point de l'espace-temps de Minkowski peut être plongé dans l'univers d'Einstein et il en est de même pour ses objets. Nous ne donnons pas les détails, mais référons plutôt l'individu intéressé à la section 2 de [LD12].

## Références

- [Cal00] J. J. CALLAHAN : *The Geometry of Spacetime : An Introduction to Special and General Relativity*. Springer-Verlag New York, Inc., 2000.
- [LD12] R. LAREAU-DUSSAULT : Les surfaces croches de l'univers d'Einstein. maîtrise ès sciences, Université de Sherbrooke, 2012.

YANNICK LEBRUN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Yannick.Lebrun@USherbrooke.ca

# Les modèles MA, AR et ARMA multidimensionnels : estimation et causalité

Steven Fortier

**RÉSUMÉ** Le monde tel qu'on le connaît est rempli de phénomènes dépendant du temps. En statistique, l'une des méthodes fréquemment utilisée est celle des séries chronologiques. À l'aide d'un modèle, il est possible de faire des prédictions sur des événements futurs. Dans cet article, le concept de série chronologique est introduit et l'on s'intéresse à certains modèles importants. Le concept de causalité est abordé ainsi que certains résultats théoriques. On termine le tout avec quelques exemples simples.

## 1 Introduction

Une série chronologique est une suite formée d'observations au cours du temps. L'analyse des séries chronologiques est un outil couramment utilisé de nos jours pour la prédiction de données futures. Ce domaine possède beaucoup d'applications en finance, en médecine, en économétrie et en météorologie et dans bien d'autres domaines. Par exemple, en finance, on s'intéresse à modéliser le taux de change d'une devise. En météorologie, les scientifiques modélisent par exemple la température au Québec dans le dernier mois pour prédire la température qu'il fera demain. L'idée est de prendre un échantillon de données et de construire le meilleur modèle qui ajuste ces données. Ce modèle nous permet de tirer certaines conclusions sur la série.

Par exemple, on peut établir une formule pour la *prédiction de données*, *détecter certains pics* ou *modéliser la tendance (orientation)* de la série. Un autre aspect important de la série est la *composante saisonnière*, c'est-à-dire la présence de cycles. Un autre concept intéressant serait le *phénomène de causalité*, c'est-à-dire l'influence d'une série sur une autre. Cependant, il n'est pas toujours évident de choisir le bon modèle, car, normalement, plusieurs peuvent être de bons candidats. La plupart de ceux-ci auront tendance à minimiser la variance des résidus. Il faut aussi considérer le nombre de paramètres à estimer. Normalement, on utilise le principe de parcimonie qui nous propose de choisir le modèle demandant le moins de paramètres avec une variance faible des résidus. Il y a donc plusieurs critères à considérer dans la création d'un modèle.

---

J'aimerais remercier mon directeur Taoufik Bouezmarni. Je remercie également le professeur Bernard Colin et mes collègues de travail qui m'ont aidé dans la rédaction de cet article.

L'article est structuré de la façon suivante. Dans la deuxième section, on donne les définitions nécessaires à la compréhension du corps de l'article. Ensuite, la troisième section présente trois principaux modèles : AR, MA et ARMA. On définit le concept de causalité entre deux séries et on énonce certains résultats importants. Les sections quatre et cinq se consacrent à l'estimation et à certains exemples.

## 2 Définitions

Dans cette section, nous donnons quelques définitions et notations utiles pour la suite de l'article.

### 2.1 Série chronologique

**Définition 2.1.** Une série chronologique provient de la réalisation d'une famille de variables aléatoires  $\{X_t, t \in I\}$ , où l'ensemble  $I$  est un intervalle de temps qui peut être discret ou continu. Pour cet article, nous utilisons l'ensemble  $I = \{0, 1, \dots, T\}$ , où  $T$  est le nombre total d'observations.

### 2.2 Bruit blanc

**Définition 2.2.** On dit de la suite de variables aléatoires  $\{\varepsilon_t\}$  qu'elle constitue un *bruit blanc faible* si elle possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t] &= 0 && \text{pour tout } t \in Z \\ E[\varepsilon_t^2] &= \sigma_\varepsilon^2 \neq 0 \text{ et constante} \\ \text{Cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) &= 0 \text{ si } t \neq s. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En d'autres termes, les variables aléatoires  $\varepsilon_t$  sont de moyenne nulle, de variance constante et non corrélées. On dit que  $\{\varepsilon_t\}$  est un *bruit blanc fort* s'il est un bruit blanc faible et que les variables aléatoires  $\varepsilon_t$  sont i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées).

*Notation.*

1. Si  $\{\varepsilon_t\}$  bruit blanc faible, alors  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ;
2. Si  $\{\varepsilon_t\}$  bruit blanc fort, alors  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{I. I. D}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

### 2.3 Stationnarité

Une propriété importante des séries chronologiques est la stationnarité. Cette propriété est nécessaire pour appliquer certains théorèmes sur la causalité. La définition suivante présente le type de stationnarité le plus utilisé.

**Définition 2.3.** Une suite  $\{X_t : t \geq 0\}$  de variables aléatoires est dite *stationnaire du second ordre* si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \mu < \infty \\ E[X_t^2] &< \infty \\ \text{Cov}(X_s, X_{s+t}) &= \text{Cov}(X_{s-1}, X_{s-1+t}) = \dots = \text{Cov}(X_0, X_t) \quad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Remarque 2.4.* On appelle  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$  l'*autocovariance* (ACV) à l'horizon  $h$  et on la note :

$$r^X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}). \quad (2.2)$$

*Remarque 2.5.* On peut prendre cette fonction et la diviser par la variance de  $\{X_t\}$  pour obtenir une nouvelle fonction que l'on appellera *autocorrélation* (ACF). On la note :

$$\rho^X(h) = \frac{r^X(h)}{r^X(0)} \quad (2.3)$$

avec les propriétés suivantes :

1.  $-1 \leq \rho^X(h) \leq 1$  ;
2.  $\rho^X(h) = 0$  signifie que les observations  $X_t$  et  $X_{t+h}$  sont non corrélées ;
3.  $\rho^X(h) = \pm 1$  signifie que la corrélation est parfaite (négative ou positive).

## 2.4 Opérateurs définis sur une série chronologique

### 2.4.1 Opérateur de retard

**Définition 2.6.** L'*opérateur de retard*  $B$  se définit de la manière suivante :

$$B(X_t) = X_{t-1}.$$

*Remarque 2.7.*  $B^n(X_t) = X_{t-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2.4.2 Opérateur de différence d'ordre $d$

**Définition 2.8.** On définit l'opérateur  $\Delta_d$  de différence d'ordre  $d$  comme l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t.$$

On peut aussi prendre l'opérateur d'ordre un et l'appliquer plusieurs fois :

$$\Delta^2(X_t) = \Delta(\Delta(X_t)) = \Delta(X_t - X_{t-1}) = (1 - B)(X_t - X_{t-1}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}.$$

Ces opérateurs peuvent être utilisés afin de transformer un processus de moyenne non nulle en un processus de moyenne nulle. On peut aussi s'en servir pour enlever la composante saisonnière de la série. Dans la prochaine section, on les utilise pour mieux représenter les modèles.

## 3 Types de modèle

### 3.1 Cas unidimensionnel

Dans cette section, on considère certains modèles fréquemment utilisés pour une série chronologique  $\{X_t\}$ . Nous commençons par deux modèles simples : le modèle autorégressif et le modèle à moyenne mobile. On continue avec le modèle ARMA qui combine ces deux modèles.

### 3.1.1 Processus autorégressif AR( $p$ )

Les premiers processus autorégressifs ont été introduits par George Udny Yule dans [Yul27]. Dans cet article, Yule utilise le premier modèle autorégressif pour modéliser la série chronologique du nombre de taches solaires plutôt que la méthode du périodogramme de Schuster [Sch06]. Un processus autorégressif est un processus où l'on écrit une observation au temps  $t$  comme une combinaison linéaire des observations passées plus un certain bruit blanc.

**Définition 3.1.** La suite  $\{X_t : t \geq 0\}$  est un processus autorégressif d'ordre  $p$  ( $p > 0$ ) s'il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X_t = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + \varepsilon_t, \quad \text{où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2). \quad (3.1)$$

Les  $\phi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) constituent les paramètres du modèle,

Dans ce cas, on note  $\{X_t\} \sim \text{AR}(p)$ . De la même façon, on peut réécrire un processus AR( $p$ ) avec un polynôme  $\phi(B)$  qui multipliera  $X_t$  cette fois-ci :

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t \text{ avec } \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p. \quad (3.2)$$

**Exemple 3.2.** Un processus AR(1) prend la forme suivante :

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

### 3.1.2 Processus à moyenne mobile MA( $q$ )

C'est Eugen Slutsky qui, en 1927, dans son article [Slu27], a introduit pour la première fois les processus à moyenne mobile. La définition suivante présente ce processus.

**Définition 3.3.** On dit que la suite  $\{X_t : t \geq 0\}$  est un processus à moyenne mobile d'ordre  $q$  ( $q > 0$ ) si celui-ci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X_t = \sum_{k=1}^q \theta_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t, \quad \text{où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (3.3)$$

où les  $\theta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) sont les paramètres du modèle.

Dans ce cas, on note  $\{X_t\} \sim \text{MA}(q)$ .

**Exemple 3.4.** Un processus MA(1) prend la forme suivante :

$$X_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

On peut utiliser l'opérateur de retard  $B$  pour écrire ce processus sous une autre forme. On aura donc un polynôme en  $B$  qui multipliera  $\varepsilon_t$  :

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t \text{ avec } \theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q. \quad (3.5)$$

*Remarque 3.5.* Si  $\{X_t\} \sim \text{MA}(q)$ , alors :

1.  $X_t$  est stationnaire ;
2.  $\rho^X(h) = 0$  pour tout  $h > q$ .

**Définition 3.6.** Un processus est dit *causal* s'il existe une suite  $\{a_k\}$  réelle telle que  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$  et que

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{t-k}. \quad (3.6)$$

Parfois, lorsque l'on parle d'un processus causal, on dit que celui-ci a une représentation  $\text{MA}(\infty)$ .

*Remarque 3.7.* Tout processus  $\text{MA}(q)$  est causal.

**Définition 3.8.** Un processus est dit *inversible* s'il existe une suite  $\{b_k\}$  réelle telle que  $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$  et

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X_{t-k}. \quad (3.7)$$

Une autre façon de dire qu'un processus est inversible est de dire qu'il possède une représentation  $\text{AR}(\infty)$ .

*Remarque 3.9.* Avec cette définition, tout processus  $\text{AR}(p)$  est inversible.

**Théorème 3.10.** *Un processus autoregressif  $\text{AR}(p)$  est causal et stationnaire si et seulement si son polynôme  $\phi(z)$  est tel que*

$$\phi(z) \neq 0 \text{ avec } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1. \quad (3.8)$$

*En d'autres mots, toutes les racines de  $\phi(z)$  sont de norme plus grande que 1.*

Ce théorème se retrouve dans le livre de Brockwell et Davis [BD09] (théorème 3.1.1). La démonstration y est aussi présente.

**Exemple 3.11.** Le processus  $\text{AR}(2)$  suivant est stationnaire et causal :

$$X_t = -\frac{1}{6}X_{t-1} + \frac{1}{6}X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \text{où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2). \quad (3.9)$$

En effet, on peut le réécrire comme :

$$\left(-\frac{1}{6}B^2 + \frac{1}{6}B + 1\right) X_t = \varepsilon_t.$$

Ainsi, on a que

$$\phi(z) = -\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z + 1 = \frac{1}{6}(z^2 - z - 6) = \frac{1}{6}(z+2)(z-3).$$

Les racines sont à l'extérieur du cercle unité, donc le processus est stationnaire et causal.

**Théorème 3.12.** *Un processus à moyenne mobile  $\text{MA}(q)$  est inversible si et seulement si son polynôme  $\theta(z)$  est tel que*

$$\theta(z) \neq 0 \text{ avec } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1. \quad (3.10)$$

*On note la ressemblance de cet énoncé avec le théorème de stationnarité et de causalité pour les processus autorégressifs.*

La démonstration se trouve dans le livre de Brockwell et Davis [BD09] (Théorème 3.1.2).

### 3.1.3 Modèle ARMA( $p, q$ )

Les modèles AR et MA peuvent être parfaits dans certain cas, mais il peut arriver que l'on ait besoin d'estimer un grand nombre de paramètres pour ajuster le modèle. Si l'on dispose de peu d'observations, ces estimations auront tendance à être peu précises. De plus, si un modèle contenant  $p$  paramètres convient pour la situation, il n'est pas bon de tenter d'ajuster un modèle qui en contiendra plus que  $p$ . Les modèles ARMA consistent à avoir une partie autorégressive et une partie à moyenne mobile. Herman Wold [Wol38] a montré que les processus ARMA pouvaient être utilisés pour modéliser n'importe quelle série stationnaire pour autant que les ordres  $p$  et  $q$  soient bien choisis. Box et Jenkins [BJ70] ont travaillé pour développer une méthodologie pour l'estimation du modèle d'une série chronologique. Il peut être facile de vérifier la causalité et l'inversibilité du modèle ARMA à l'aide des théorèmes 3.10 et 3.12.

**Définition 3.13.** Un processus est dit ARMA( $p, q$ ) s'il existe des suites réelles  $\{\phi_k\}$  et  $\{\theta_j\}$  telles que

$$X_t - \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{avec } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

On peut aussi utiliser les polynômes  $\phi(B)$  et  $\theta(B)$  pour réécrire ce modèle sous la forme :

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

avec

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \text{ et } \theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q.$$

On note  $\{X_t\} \sim \text{ARMA}(p, q)$ .

*Remarque 3.14.* On note certaines propriétés pour les modèles ARMA( $p, q$ ) :

1. Si  $p = q = 0$ , on a  $X_t = \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  ;
2. Si  $p = 0$  et  $q \neq 0$ , on a  $\{X_t\} \sim \text{MA}(q)$  ;
3. Si  $q = 0$  et  $p \neq 0$ , on a  $\{X_t\} \sim \text{AR}(p)$ .



### 3.2 Cas bidimensionnel et critère de causalité entre deux séries

Dans cette section, on considère deux séries  $\{X_{1t}\}$  et  $\{X_{2t}\}$  et on reprend les notions de processus autorégressif et à moyenne mobile de la deuxième section. Le but est donc d'avoir un modèle pour représenter la structure du vecteur  $U_t = (X_{1t}, X_{2t})'$ . Par la suite, on donnera des conditions nécessaires et suffisantes pour tester la causalité entre  $\{X_{1t}\}$  et  $\{X_{2t}\}$ . Tout d'abord, il faut bien comprendre ce que l'on veut dire lorsqu'on parle de causalité entre deux séries.

#### 3.2.1 Définitions de causalité au sens de Granger

La définition de causalité au sens de Granger a été introduite pour la première fois dans un article de Clive Granger [Gra69].

**Définition 3.15.** Soient :

1.  $X_1 = \{X_{1t}\}$  et  $X_2 = \{X_{2t}\}$  deux séries stationnaires et inversibles ;
2.  $\bar{X}_{1t} = \{X_{1s} \mid s < t\}$  et  $\bar{X}_{2t} = \{X_{2s} \mid s < t\}$  (Historique de  $X_{it}$  pour  $i = 1, 2$ ) ;
3.  $\{\varepsilon_t\}$  un bruit blanc faible à deux dimensions avec matrice de covariance  $\Sigma$  ;
4.  $A_t =$  Ensemble dénombrable de variables aléatoires de variances finies et comprenant  $X_{1t}$  et  $X_{2t}$  (Ensemble d'information) ;
5.  $\bar{A}_t = \bigcup_{s < t} A_s$   
 $=$  Ensemble de variables aléatoires de variances finies comprenant  $\bar{X}_{1t}$  et  $\bar{X}_{2t}$  ;
6.  $\bar{A}_t \setminus \bar{X}_{1t}$  constitue l'information disponible au temps  $t - 1$  sans l'historique de  $X_{1t}$  ;
7.  $A = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} A_t$  ;
8.  $B$  est un sous-ensemble de  $A$  ;
9.  $\hat{X}_{it} = E(X_{it}|B)$  est le meilleur prédicteur linéaire sans biais de  $X_{it}$  sachant l'information contenu dans  $B$  ;
10.  $\varepsilon(X_{it}|B) = X_{it} - \hat{X}_{it}$  est l'écart entre la véritable valeur et la prédiction ;
11.  $\sigma_\varepsilon^2(X_{it}|B) = E[(\varepsilon(X_{it}|B))^2]$ .

**Définition 3.16.** On dit que  $X_1$  cause  $X_2$  si et seulement si

$$\sigma_\varepsilon^2(X_{2t}|\bar{A}_t) < \sigma_\varepsilon^2(X_{2t}|\bar{A}_t \setminus \bar{X}_{1t}) \text{ pour au moins une valeur de } t.$$

On note alors  $X_1 \rightarrow X_2$ .

On dit qu'il y a *rétroaction*<sup>1</sup> entre  $X_1$  et  $X_2$  si et seulement si  $X_1$  cause  $X_2$  et  $X_2$  cause  $X_1$ .

**Définition 3.17.** On dit que  $X_1$  ne cause pas  $X_2$  si et seulement si

$$\sigma_\varepsilon^2(X_{2t}|\bar{A}_t) = \sigma_\varepsilon^2(X_{2t}|\bar{A}_t \setminus \bar{X}_{1t}) \quad \text{pour tout } t \quad (\text{Causalité en variance})$$

ou, de façon équivalente,

$$E(X_{2t}|\bar{A}_t) = E(X_{2t}|\bar{A}_t \setminus \bar{X}_{1t}) \text{ presque sûrement pour tout } t. \\ (\text{Causalité en moyenne})$$

En d'autres termes,  $X_1$  ne cause pas  $X_2$  si et seulement si la prédiction de  $X_{2t}$  sachant l'historique de  $X_{1t}$  et  $X_{2t}$  reste la même que si on connaît seulement l'historique de  $X_{2t}$ . Pour les démonstrations qui suivent, on utilisera cette définition de causalité utilisant ces prédictions. Dans les sections qui suivent,  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc faible à deux dimensions tel que :

1.  $E[\varepsilon_t] = 0$ ;
2.  $E[\varepsilon'_t \varepsilon_s] = \begin{cases} I_2 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$ ,

où  $I_2$  est la matrice identité d'ordre deux et  $\varepsilon'_t$  est le vecteur  $\varepsilon_t$  transposé.

On regarde maintenant une forme bidimensionnelle des modèles vus précédemment.

### 3.2.2 Processus autorégressif bidimensionnel

**Définition 3.18.** On dit que  $(X_1, X_2)'$  est un processus autorégressif s'il peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{j=0}^p \phi_j \begin{pmatrix} X_{1,t-j} \\ X_{2,t-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(B) & \phi_{12}(B) \\ \phi_{21}(B) & \phi_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

où  $\phi_i$  sont des matrices de format 2x2 telles que  $\phi_0 = I_2$  et où  $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}$  et  $\phi_{22}$  sont des polynômes en  $B$  définissant les coefficients autorégressifs.

Le théorème suivant nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $X_1$  ne cause pas  $X_2$ .

---

<sup>1</sup>De l'anglais, feedback.

**Théorème 3.19.** *Soit  $(X_1, X_2)'$ , un processus autorégressif, alors  $X_1 \nleftrightarrow X_2$  si et seulement si  $(X_1, X_2)'$  est tel que*

$$\begin{pmatrix} \phi_{11}(B) & \phi_{12}(B) \\ 0 & \phi_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* On reprend ici une démonstration de [BDR92] pour le cas bidimensionnel. Premièrement, établissons certaines équations qui nous serviront pour la démonstration. On ne démontre que la condition suffisante dans cet article, mais le reste de la démonstration peut se trouver dans [BDR92]. Soit le processus  $(X_1, X_2)'$  autorégressif d'ordre deux défini par :

$$\phi(B) \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(B) & \phi_{12}(B) \\ \phi_{21}(B) & \phi_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

où  $\phi$  est une matrice de format  $2 \times 2$ .

La définition du processus bidimensionnel introduite dans 3.18 exige que la matrice  $\phi_0$  soit la matrice identité. Ceci nous garantit que les coefficients de  $X_{1t}$  et  $X_{2t}$  seront toujours un. On peut donc écrire les polynômes  $\phi_{21}(B)$  et  $\phi_{22}(B)$  sous les formes suivantes :

$$\phi_{21}(B) = - \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{21(k)} B^k \quad \text{et} \quad \phi_{22}(B) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{22(k)} B^k.$$

Si l'on multiplie la deuxième ligne de la matrice  $\phi$  avec la colonne  $\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix}$ , on peut isoler  $X_{2t}$  et l'écrire sous la forme

$$X_{2t} = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{21(k)} X_{1,t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{22(k)} X_{2,t-k} + \varepsilon_{2t}.$$

En posant  $Z_{it} = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{2i(k)} X_{i,t-k}$ , on peut écrire

$$X_{2t} = Z_{1t} + Z_{2t} + \varepsilon_{2t}.$$

On peut donc dire que

$$\begin{aligned} E(X_{2t} | \bar{X}_{1t}, \bar{X}_{2t}) &= E(Z_{1t} + Z_{2t} + \varepsilon_{2t} | \bar{X}_{1t}, \bar{X}_{2t}) \\ &= E(Z_{1t} | \bar{X}_{1t}, \bar{X}_{2t}) + E(Z_{2t} | \bar{X}_{1t}, \bar{X}_{2t}) + E(\varepsilon_{2t} | \bar{X}_{1t}, \bar{X}_{2t}) \\ &= Z_{1t} + Z_{2t}. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que comme  $Z_{it}$  est composé des valeurs de l'historique de  $X_{it}$ , la prédiction de  $Z_{it}$  restera  $Z_{it}$ . Ensuite, la prédiction de  $\varepsilon_{2t}$  est 0, car celui-ci est non corrélé avec  $\bar{X}_{2t}$ . De même, on peut dire que

$$\begin{aligned} E(X_{2t} | \bar{X}_{2t}) &= E(Z_{1t} + Z_{2t} + \varepsilon_{2t} | \bar{X}_{2t}) \\ &= E(Z_{1t} | \bar{X}_{2t}) + E(Z_{2t} | \bar{X}_{2t}) + E(\varepsilon_{2t} | \bar{X}_{2t}) \\ &= E(Z_{1t} | \bar{X}_{2t}) + Z_{2t}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose que  $\phi_{21} = 0$ , il s'ensuit que  $Z_{1t} = 0$ , ce qui implique que  $E(Z_{1t}|\bar{X}_{2t}) = 0$ . Alors, on a que  $E(X_{2t}|\bar{X}_{1t}, \bar{X}_{2t}) = E(X_{2t}|\bar{X}_{2t})$  et par conséquent,  $X_1 \nrightarrow X_2$ .  $\square$

**Exemple 3.20.** Soit le processus  $(X_1, X_2)$  ayant pour modèle :

$$\begin{cases} X_{1t} &= -0,5X_{1,t-1} + X_{1,t-2} + 2X_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ X_{2t} &= 0,2X_{2,t-1} + 0,5X_{2,t-2} + \varepsilon_{2t}. \end{cases}$$

On peut réécrire le modèle comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 + 0,5B - B^2 & -2B \\ 0 & 1 - 0,2B - 0,5B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

Nous avons que  $\phi_{21}(B) = 0$  donc, en vertu du théorème précédent,  $X_1 \nrightarrow X_2$ .

### 3.2.3 Processus à moyenne mobile bidimensionnel

On dit que  $(X_1, X_2)'$  possède une représentation de processus à moyenne mobile si l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^q \theta_j \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-j} \\ \varepsilon_{2,t-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11}(B) & \theta_{12}(B) \\ \theta_{21}(B) & \theta_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

où, les  $\theta_j$  sont des matrices 2x2 telles que  $\theta_0 = I_2$  et où  $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}$  et  $\theta_{22}$  sont des polynômes en  $B$  définissant les coefficients du processus à moyenne mobile. Le théorème suivant nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $(X_1, X_2)'$  soit inversible.

**Théorème 3.21.** *Si  $(X_1, X_2)'$  est un processus à moyenne mobile bidimensionnel tel que :*

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11}(B) & \theta_{12}(B) \\ \theta_{21}(B) & \theta_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

*alors  $(X_1, X_2)'$  est inversible si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} \theta_{11}(z) & \theta_{12}(z) \\ \theta_{21}(z) & \theta_{22}(z) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1.$$

Le théorème qui suit nous donne des conditions nécessaires et suffisantes pour vérifier la causalité entre deux séries possédant une structure MA bidimensionnelle.

**Théorème 3.22.** *Soit  $X = (X_1, X_2)'$  un processus à moyenne mobile bidimensionnel inversible, alors  $X_1 \nrightarrow X_2$  si et seulement si  $(X_1, X_2)'$  est tel que*

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11}(B) & \theta_{12}(B) \\ 0 & \theta_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Soit le processus à moyenne mobile donné par

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11}(B) & \theta_{12}(B) \\ \theta_{21}(B) & \theta_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

Comme le processus est inversible, la matrice  $\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11}(B) & \theta_{12}(B) \\ \theta_{21}(B) & \theta_{22}(B) \end{pmatrix}$  est inversible et on a

$$\theta^{-1} = \frac{1}{\det(\theta)} \begin{pmatrix} \theta_{22}(B) & -\theta_{12}(B) \\ -\theta_{21}(B) & \theta_{11}(B) \end{pmatrix}.$$

On peut donc multiplier par l'inverse des deux côtés de l'équation. On obtient donc :

$$\frac{1}{\det(\theta)} \begin{pmatrix} \theta_{22}(B) & -\theta_{12}(B) \\ -\theta_{21}(B) & \theta_{11}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

qui est un processus autorégressif. On peut donc appliquer le théorème précédent et on montre que  $X_1 \nleftrightarrow X_2$  si et seulement si  $\theta_{21} = 0$ .  $\square$

**Exemple 3.23.** Soit le processus  $(X_1, X_2)$  ayant pour modèle :

$$\begin{cases} X_{1t} &= \varepsilon_{1,t} - 0,25\varepsilon_{1,t-2} + \varepsilon_{2,t-1} - 0,25\varepsilon_{2,t-2} \\ X_{2t} &= \varepsilon_{2,t} - 0,2\varepsilon_{2,t-2} \end{cases}.$$

On peut réécrire le modèle comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0,25B^2 & B - 0,25B^2 \\ 0 & 1 - 0,2B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

Comme  $\theta_{21}(B) = 0$ , en vertu du théorème précédent,  $X_1 \nleftrightarrow X_2$ .

Considérons maintenant un processus ARMA bidimensionnel et donnons la forme de ce modèle.

### 3.2.4 Processus ARMA bidimensionnel

Pour la suite du document, nous écrirons  $\theta_{ij} = \theta_{ij}(B)$  et  $\phi_{ij} = \phi_{ij}(B)$ . Le processus  $(X_1, X_2)'$  possède une représentation ARMA s'il peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

où  $\phi_{ij}$  et  $\theta_{ij}$  sont des polynômes en  $B$  pour  $i, j = 1, 2$ .

**Théorème 3.24.** Soit  $(X_1, X_2)'$  suivant un modèle ARMA inversible donné par

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

a) *Condition suffisante* : Si  $\phi_{21} = 0$  et  $\theta_{12} = \theta_{21} = 0$ , alors  $X_1 \nrightarrow X_2$ .

*Cette condition correspond à la représentation suivante :*

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & 0 \\ 0 & \theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

b) *Condition nécessaire et suffisante* :  $X_1 \nrightarrow X_2$  si et seulement si

$$\phi_{11}\theta_{21} - \phi_{21}\theta_{11} = 0.$$

Pour démontrer ces résultats, on utilise le fait que le processus est inversible et on multiplie par  $\theta^{-1}$  comme dans l'autre démonstration. On utilise ensuite la condition de causalité du processus autorégressif. Le résultat suit. Théoriquement, ces conditions de causalité sont plutôt faciles à vérifier lorsque l'on possède déjà un modèle. Cependant, en pratique, nous possédons un échantillon du vecteur  $X_t$ . Nous devons d'abord déterminer quel type de modèle utiliser et l'ordre de celui-ci.

## 4 Estimation du modèle

### 4.1 Autocorrélation d'un processus MA( $q$ )

Au début de cet article, nous avons défini la fonction d'autocorrélation d'un processus à l'aide de l'égalité

$$\rho^X(h) = \frac{r^X(h)}{r^X(0)},$$

où  $r^X(h)$  était la fonction d'autocovariance définie par

$$r^X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}).$$

Rappelons que si  $X_t \sim \text{MA}(q)$ , alors :

$$\rho^X(h) = 0 \quad \text{pour tout } h > q. \quad (4.1)$$

Cependant, on ne connaît généralement pas  $r^X(h)$ . On devra donc l'estimer à partir de l'autocovariance empirique notée  $\hat{r}^X(h)$ . Soit  $T$ , le nombre d'observations de notre échantillon et définissons par  $\bar{X}_T$ , la moyenne empirique. L'autocovariance empirique est alors définie par

$$\hat{r}^X(h) = \begin{cases} \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t+h} - \bar{X}_T) & \text{si } 0 \leq h \leq T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

On aura aussi l'autocorrélation empirique définie par :

$$\hat{\rho}^X(h) = \hat{r}^X(h) / \hat{r}^X(0). \quad (4.3)$$

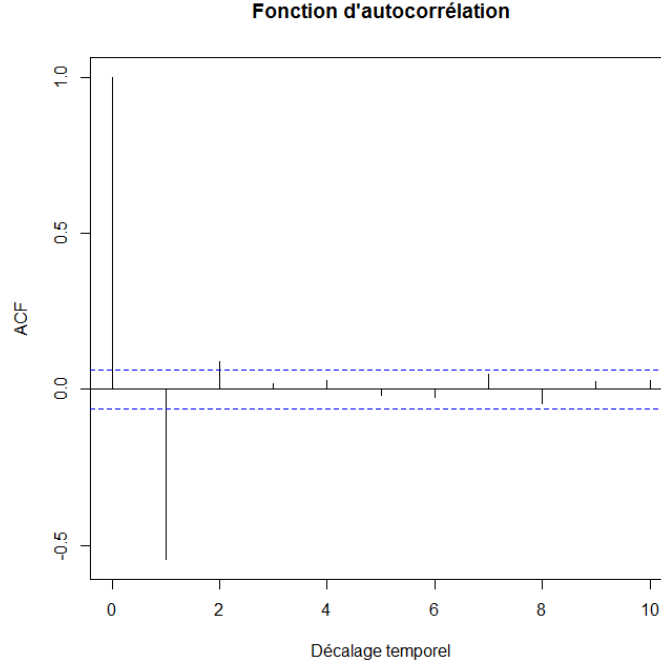


FIGURE 1 – Autocorrélation d'un exemple de série chronologique

On sait que la fonction d'autocorrélation d'un processus à moyenne mobile d'ordre  $q$  s'annule pour tout  $h > q$ . La figure 1 illustre l'autocorrélation empirique d'une série chronologique. Les lignes pointillées délimitent la région où l'autocorrélation est significativement nulle. Grâce à ce graphe, on remarque que l'autocorrélation s'annule à partir de  $h = 3$ . On peut donc conclure que les données semblent représenter un processus à moyenne mobile d'ordre  $q = 2$ . Des logiciels comme R peuvent générer facilement la fonction d'autocorrélation empirique et nous donner une idée du modèle que la série peut suivre. Voyons maintenant si l'on peut appliquer le même procédé pour identifier l'ordre d'un processus autorégressif. Soit le processus AR(1) suivant :

$$X_t = 0,5X_{t-1} + \varepsilon_t \text{ où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0,1). \quad (4.4)$$

On peut montrer que la fonction d'autocorrélation est donnée par  $\rho^X(h) = (0,5)^h$ . La figure 2 représente l'autocorrélation pour mille réalisations de ce processus. On remarque que la fonction prend plus de temps avant d'être significativement nulle et ne s'annule donc pas pour tout  $h > 1$ . De plus, l'équation donnée par le modèle autorégressif indique qu'il y a une corrélation de 0,5 entre les variables  $X_t$  et  $X_{t-1}$ . Or, comme  $X_{t-1}$  satisfait l'équation du modèle, on peut réécrire  $X_t$  sous la forme

$$X_t = 0,5^2 X_{t-2} + 0,5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \text{ où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0,1).$$

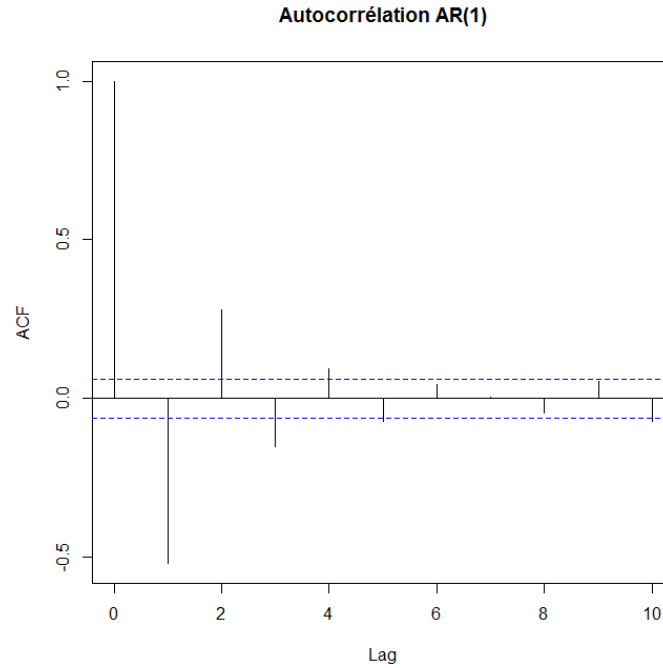


FIGURE 2 – Autocorrélation pour mille réalisations de  $X_t = 0,5X_{t-1} + \varepsilon_t$

On voit donc que la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$  est de  $0,5^2$ . On peut refaire la même chose pour  $X_{t-h}$  et montrer que l'autocorrélation ne s'annule pas.

## 4.2 Autocorrélation partielle d'un processus $\text{AR}(p)$

L'idée est donc de définir une nouvelle fonction d'autocorrélation (appelée autocorrélation partielle (PACF)) qui calcule la corrélation entre  $X_t$  et  $X_{t+h}$  en ne tenant pas compte de l'influence linéaire des valeurs  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$ . On note l'autocorrélation partielle  $\alpha^X(h)$ .

*Remarque 4.1.* Il est possible de démontrer que :

1.  $\alpha^X(0) = 1$  ;
2.  $\alpha^X(1) = \rho^X(1)$ .

Dans l'exemple précédent,  $\alpha^X(-2)$  est l'autocorrélation entre  $X_t$  et  $X_{t-2}$  sans l'influence de  $X_{t-1}$ . Cela revient à dire que :

$$\alpha^X(-2) = \text{Corr}(X_t - 0,5X_{t-1}, X_{t+2} - 0,5X_{t+1}).$$

On remarque que cette nouvelle autocorrélation est plus difficile à calculer que l'ancienne. On peut définir l'autocorrélation partielle de façon plus formelle grâce à l'algorithme de Durbin-Levinson. Le livre de Brockwell [BD09] fournit



de bonnes explications sur cet algorithme. Avec cette nouvelle formulation, on obtient une façon, analogue à (4.1), de tester si notre processus est autorégressif :

$$\text{si } \{X_t\} \sim \text{AR}(p) \text{ , alors } \alpha^X(h) = 0 \quad \text{pour tout } h > p. \quad (4.5)$$

On peut maintenant regarder dans la figure 3 l'autocorrélation partielle(PACF) pour ces mille observations.

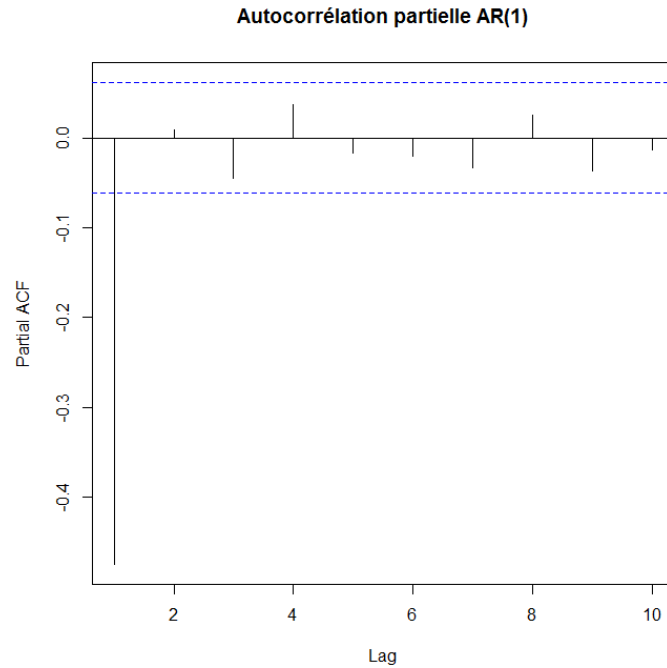


FIGURE 3 – Autocorrélation partielle du processus AR(1)

Maintenant, on a un graphe qui est significativement nul lorsque  $h > 1$ . L'ACF et le PACF sont des outils faciles à utiliser qui permettent de reconnaître les modèles autorégressifs et à moyenne mobile. Dans certains cas, il est possible que ses fonctions décroissent très lentement. À ce moment, il faudra songer à utiliser d'autres types de modèles, par exemple, le modèle ARMA.

### 4.3 Estimation des paramètres

Dans cette section, nous introduisons les équations de Yule-Walker qui permettent d'estimer les paramètres d'un modèle autorégressif. Par la suite, on introduit la méthode du maximum de vraisemblance avec des critères nous permettant de choisir l'ordre d'un modèle AR, MA ou ARMA.

### 4.3.1 Équations de Yule-Walker

Soit  $X_t \sim \text{AR}(p)$ , un processus autorégressif d'ordre  $p$ , stationnaire et causal, de moyenne nulle défini par

$$X_t = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + \varepsilon_t \text{ où } \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2). \quad (4.6)$$

L'idée de l'estimateur de Yule-Walker est de trouver des équations reliant les paramètres  $\phi_k$  et l'autocovariance utilisant l'hypothèse de processus causal. Commençons d'abord par multiplier la première équation par  $X_{t-h}$  et prenons l'espérance des 2 côtés de l'équation. Nous obtenons

$$\begin{aligned} r^X(h) &= E \left[ \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} X_{t-h} + \varepsilon_t X_{t-h} \right] \\ &= \sum_{k=1}^p \phi_k E[X_{t-k} X_{t-h}] + E[\varepsilon_t X_{t-h}] \\ &= \sum_{k=1}^p \phi_k r^X(k-h) + E[\varepsilon_t X_{t-h}]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Regardons plus attentivement le terme  $E[\varepsilon_t X_{t-h}]$  de (4.7). Comme nous savons que  $\{X_t\}$  est causal, on peut utiliser la relation (3.10) et obtenir :

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{t-k}.$$

On a donc que

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t X_{t-h}] &= E \left[ \varepsilon_t \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{t-h-k} \right] \\ &= E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_t \varepsilon_{t-h-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h-k}]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour  $h = 0$ , on a

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $h > 0$ , on aura toujours que  $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h-k}] = 0$ , car  $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . On obtient donc le système d'équations suivant :

$$r^X(h) = \begin{cases} \sum_{k=0}^p r^X(k-h) \phi_k & \text{si } h = 1, \dots, p \\ \sum_{k=0}^p r^X(k-h) \phi_k + \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

On a un système d'équations à résoudre avec  $p$  équations. Si l'on note par  $r^X(p)$ , le vecteur  $(r^X(1), r^X(2), \dots, r^X(p))'$  et par  $\phi_p$ , le vecteur  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ , on obtient, en utilisant la matrice suivante,

$$R_p^X = \begin{pmatrix} r^X(0) & r^X(1) & \dots & r^X(p-1) \\ r^X(1) & r^X(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r^X(1) \\ r^X(p-1) & \dots & r^X(1) & r^X(0) \end{pmatrix},$$

le système

$$\begin{cases} r^X(p) &= R_p^X \phi_p \\ r^X(0) &= \phi_p' r^X(p) + \sigma_\varepsilon^2. \end{cases}$$

Ces équations sont les *équations de Yule-Walker*. Elles créent un lien entre les paramètres  $\phi_p$  du modèle et la fonction d'autocovariance. Afin d'estimer le vecteur de paramètres  $\phi_p$ , nous devons utiliser la fonction d'autocovariance empirique  $\hat{r}^X(p)$  définie par (4.3) comme estimateur de  $r^X(p)$ . On aura donc un système d'équations qui permettra d'estimer le vecteur  $\phi_p$ . Le système se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{r}^X(p) &= \hat{R}_p^X \hat{\phi}_p \\ \hat{r}^X(0) &= \hat{\phi}_p' \hat{r}^X(p) + \hat{\sigma}_\varepsilon^2. \end{cases}$$

*Remarque 4.2.*

1. On a que  $\sqrt{T}(\hat{\phi}_p - \phi_p) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_p(0, \sigma_\varepsilon^2 R_p^{-1})$  lorsque  $T \rightarrow \infty$  (*Normalité asymptotique*) ;
2. Si, à partir d'un ARMA( $p, q$ ), on essaie de recréer les équations de Yule-Walker, on se retrouve avec un système non-linéaire qui peut être assez difficile à résoudre.

#### 4.3.2 Maximum de vraisemblance

En statistique, l'une des méthodes les plus utilisées pour l'estimation de paramètres est celle du maximum de vraisemblance. C'est Ronald Fisher qui, en 1912 [Fis12], a publié sa méthode initialement appelée « Le critère absolu ». À l'époque, l'une des méthodes couramment utilisées était celle des moindres carrés. Soit l'échantillon  $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ , la vraisemblance quantifie la probabilité que ces observations proviennent d'une loi paramétrique, par exemple une loi normale. La vraisemblance correspond donc au produit des fonctions de densité des  $X_i$ . On peut montrer que la vraisemblance, sous l'hypothèse de normalité, est donnée par l'expression :

$$\mathcal{L}(R_T^X) = (2\pi)^{-T/2} \cdot |\det(R_T^X)|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} X_T' (R_T^X)^{-1} X_T}, \quad (4.10)$$

où  $R_T^X$  est la matrice de covariance dont l'élément  $(i,j)$  est donné par  $r^X(|i-j|)$ . On écrit la vraisemblance en fonction des paramètres  $\phi_i$ ,  $\theta_i$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  et on maximise la vraisemblance par rapport à ces paramètres. Cette méthode peut être utilisée pour n'importe quel modèle tandis que les équations de Yule-Walker sont plus reconnues pour les processus autorégressifs dû à la linéarité des équations. Si la série est stationnaire, causale et inversible, ces estimateurs auront la propriété d'être asymptotiquement normaux. La plupart des logiciels de statistique utilisent des algorithmes itératifs pour calculer ces estimateurs.

#### 4.4 Critères de sélection

Nous avons vu jusqu'à maintenant que les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle nous permettent de déterminer l'ordre d'un modèle autorégressif ou à moyenne mobile. Maintenant, l'idée est de créer des critères statistiques qui choisiront l'ordre du modèle.

##### 4.4.1 Critère AIC et BIC pour processus autorégressif

L'idée du critère AIC est de créer une fonction qui nous permettra de calculer la qualité de l'ajustement. On sait que si le nombre de paramètres augmente, la variance  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  diminue. Dans le but de ne pas se retrouver avec une surparamétrisation du modèle, on ajoute un facteur qui permettra de faire un compromis entre le nombre de paramètres et la variance minimale. Dans les paragraphes qui suivent, on considère un modèle  $AR(p)$  et on calcule  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  à l'aide du maximum de vraisemblance pour plusieurs valeurs positives de  $p$ . On pourrait aussi utiliser cette méthode pour un modèle  $MA(q)$ . Le critère AIC consiste à calculer

$$AIC(p) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2\frac{p}{T}.$$

En utilisant ce critère, on remarque que si  $\hat{p}$  est le paramètre obtenu de la minimisation et que  $p$  est le paramètre du vrai modèle, on a la propriété suivante :

$$P(\hat{p} \geq p) \longrightarrow 1 \text{ lorsque } T \longrightarrow \infty.$$

Le critère a donc tendance à choisir un nombre de paramètres plus grand que celui du vrai modèle, ce qui nous conduit à un plus petit terme d'erreur  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ . Si l'on désire avoir un meilleur choix de l'ordre  $p$ , il existe le critère BIC qui utilise une plus forte pénalité. Le critère BIC sélectionne le paramètre  $p$  qui minimise la quantité suivante :

$$BIC(p) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{p}{T} \log(T).$$

##### 4.4.2 Critère AIC et BIC pour ARMA

Il est plus coûteux en calculs de déduire l'ordre  $p$  et  $q$  pour un processus  $ARMA(p,q)$ , car on doit maintenant minimiser une fonction à deux variables. Les

critères AIC et BIC pour un processus ARMA( $p, q$ ) prennent la forme suivante :

$$\text{AIC}(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2 \frac{(p + q)}{T}$$

et

$$\text{BIC}(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{p + q}{T} \log(T).$$

Afin de minimiser ces fonctions, une méthode consiste à faire deux boucles itératives sur  $p$  et  $q$  pour tester tous les couples  $(p, q)$  jusqu'à certaines bornes  $p < P$  et  $q < Q$ . À l'intérieur de ces boucles, on calcule d'abord les estimateurs  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  utilisant par exemple les moindres carrés ou le maximum de vraisemblance, on calcule les critères AIC et BIC pour ces différents ordres et on trouve le minimum de ces quantités. On a donc les valeurs  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  qui minimisent l'AIC ou le BIC. Ensuite, on calcule des estimateurs efficaces des paramètres du modèle ARMA( $\hat{p}, \hat{q}$ ) utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

## 5 Quelques exemples

**Exemple 5.1.** La figure 4 illustre 250 observations issues du modèle AR(2) suivant :

$$X_t = 0,4X_{t-1} - 0,2X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \text{où} \quad \{\varepsilon_t\} \sim N(0,1). \quad (5.1)$$

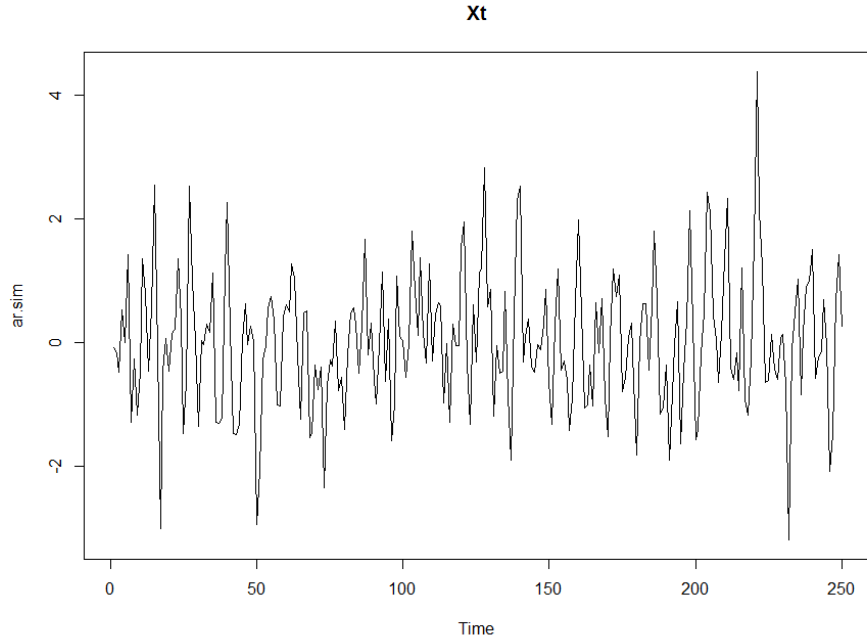


FIGURE 4 – Série  $\{X_t\}$  de l'exemple 5.1 pour 250 observations

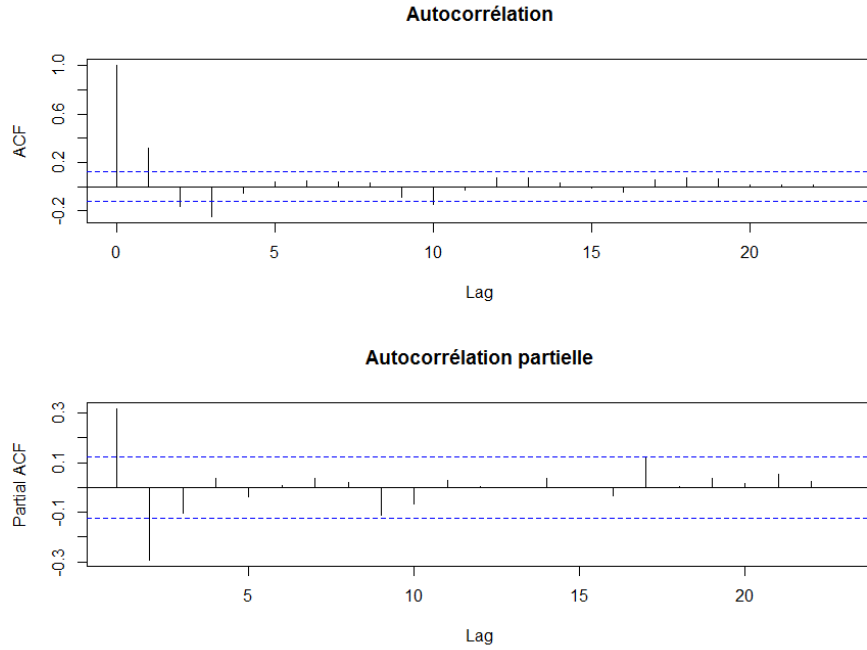


FIGURE 5 – ACF et PACF de l'exemple 5.1

À l'aide de la figure 5, on remarque que l'autocorrélation est significativement nulle à partir de l'horizon  $h = 11$  (lag = 11 sur le graphe). On ne peut pas considérer un modèle MA(10) parce qu'on aurait à estimer 10 paramètres. On se penche donc sur l'autocorrélation partielle. Elle semble être significativement nulle à partir de  $h = 3$  (lag = 3). Le meilleur choix serait donc un modèle AR(2). Regardons maintenant, à l'aide de la table 5.1, une alternative utilisant les critères de sélection automatique.

p\Critère	Aic	Bic
1	0,008335788	0,022421632
2	<b>-0,086972656</b>	<b>-0,058800969</b>
3	-0,075429370	-0,033171839
4	-0,068705027	-0,012361652
5	-0,060676024	0,009753195
6	-0,048572258	0,035942804
7	-0,052288097	0,046312809
8	-0,042556736	0,070130013

TABLE 1 – Critères AIC et BIC pour la série de l'exemple 5.1 AR(2)

Les valeurs en gras sont les valeurs minimales pour chaque critère. On voit bien que chaque critère nous conseille de choisir l'ordre  $\hat{p} = 2$ . Ceci confirme notre intuition obtenue du graphe de l'autocorrélation partielle. Maintenant, si

l'on calcule les estimateurs du maximum de vraisemblance avec  $\hat{p} = 2$ , on obtient les valeurs suivantes :

$$\hat{\phi}_1 = 0,4047 \quad \hat{\phi}_2 = -0,3213 \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0,8885.$$

On remarque que ces valeurs sont très proches de celles du modèle. Dans certains cas, il arrive que les critères automatiques ne nous donnent pas le même ordre. Par exemple, l'AIC pourrait nous conseiller de prendre l'ordre  $\hat{p} = 3$ , alors que le BIC nous conseillerait  $\hat{p} = 2$ . Il s'agit donc d'ajuster un modèle en considérant l'ordre le plus élevé et de tester si chaque paramètre est significatif.

**Exemple 5.2.** Prenons maintenant la série contenant 600 observations issues du modèle ARMA(2,1) suivant :

$$X_t - 0,4X_{t-1} - 0,2X_{t-2} = \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}, \text{ où } \{\varepsilon_t\} \sim N(0,1).$$

La figure 6 illustre les deux graphes d'autocorrélation de cette série.

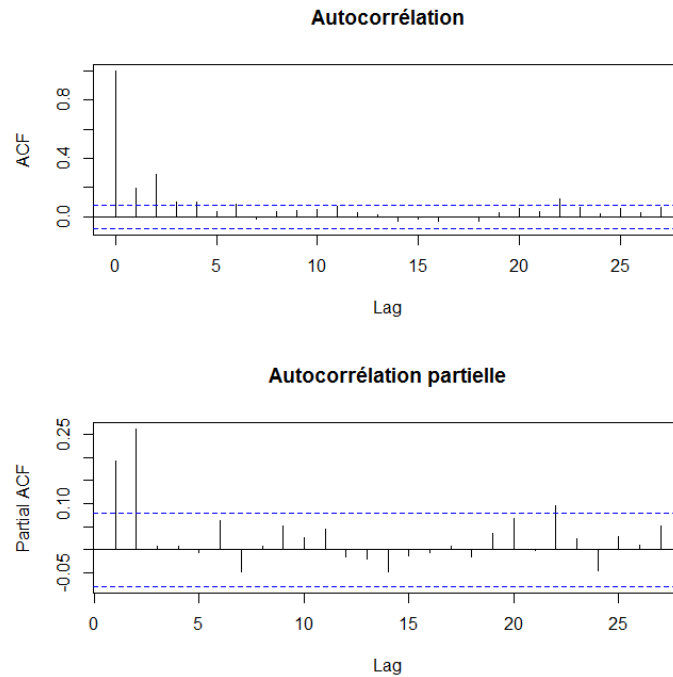


FIGURE 6 – ACF et PACF pour la série de l'exemple 5.2

On voit que l'autocorrélation et l'autocorrélation partielle décroissent assez lentement et prennent du temps avant d'être significativement nulles. Il n'est pas judicieux d'utiliser un modèle autorégressif ou à moyenne mobile. On calcule donc les critères AIC et BIC pour un modèle ARMA( $p,q$ ) pour  $p = 1, \dots, 5$  et  $q = 1, \dots, 5$ . On regarde pour chaque critère le  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  qui minimisent celui-ci. Les tables 2 et 3 résument ces valeurs.

p\q	1	2	3	4	5
1	0,03722776	0,01826715	0,01750795	0,02080303	0,02402692
2	0,01488940	0,01812976	0,02038486	0,02284583	0,02478530
3	0,01728771	0,02055846	0,02377663	0,02717506	0,02675940
4	0,02020769	0,02309737	0,02630324	0,02860790	<b>0,01086441</b>
5	0,02271617	0,02622639	0,01608050	0,01867693	0,02988239

TABLE 2 – Critère AIC de la série de l'exemple 5.2 pour  $p = 1, \dots, 5$  et  $q = 1, \dots, 5$ 

p\q	1	2	3	4	5
1	0,05188419	0,04025180	0,04682082	0,05744411	0,06799621
2	<b>0,03687404</b>	0,04744263	0,05702594	0,06681513	0,07608282
3	0,04660058	0,05719954	0,06774592	0,07847257	0,08538513
4	0,05684877	0,06706667	0,07760075	0,08723363	0,07681835
5	0,06668546	0,07752391	0,07470623	0,08463088	0,10316455

TABLE 3 – Critère BIC de la série de l'exemple 5.2 pour  $p, q = 1, \dots, 5$ 

On remarque que le critère AIC semble proposer un modèle ARMA(4,5). Ensuite, le deuxième choix qui aurait le plus bas AIC serait un modèle ARMA(2,1). Nous avons donc le choix d'estimer neuf paramètres, ou bien d'en estimer trois. Le fait de choisir un modèle à neuf paramètres maximise la vraisemblance du modèle. Ce modèle ajustera très bien notre échantillon, mais pourrait être complètement erroné pour faire des prédictions. On choisira donc d'estimer trois paramètres au lieu de neuf. Une façon de vérifier si ce choix ajuste bien les données seraient de comparer les deux estimateurs de la variance des résidus. Le critère BIC nous donne un ARMA(2,1). On garderait donc le modèle ARMA(2,1) pour ajuster nos données.

**Exemple 5.3.** Étudions maintenant une série réelle assez connue dans des logiciels de statistique, la série AirPassengers. Celle-ci représente le nombre total de passagers ayant voyagé en avion à chaque mois de 1949 à 1960. La figure 7 illustre cette série.

En regardant ce graphique, on se rend compte que certaines portions de la série semblent se répéter. Certains phénomènes reviennent chaque année, on retrouve donc la même variabilité selon la saison. Cependant, malgré le fait que les phénomènes saisonniers se répètent, le nombre de passagers semble augmenter au fil des années selon une fonction linéaire croissante. On utilisera l'opérateur de différentiation  $\Delta$  pour enlever ces phénomènes pour seulement capturer le comportement aléatoire de la série.

On commence d'abord par prendre le logarithme de la série pour stabiliser la variance puisque celle-ci, au début de la série, semble plus faible comparée à celle à la fin de la série. On se retrouvera donc à analyser la série  $\log(X_t)$ . Ensuite, on enlève la saisonnalité. Comme les variations semblent se répéter chaque année et que la variable temporelle est le nombre de mois, il est logique de vouloir appliquer l'opérateur de différentiation 12 fois (12 mois = 1 année). On obtient la nouvelle série  $\Delta^{12} \log(X_t)$ . Cette nouvelle série est illustrée à la figure 8.



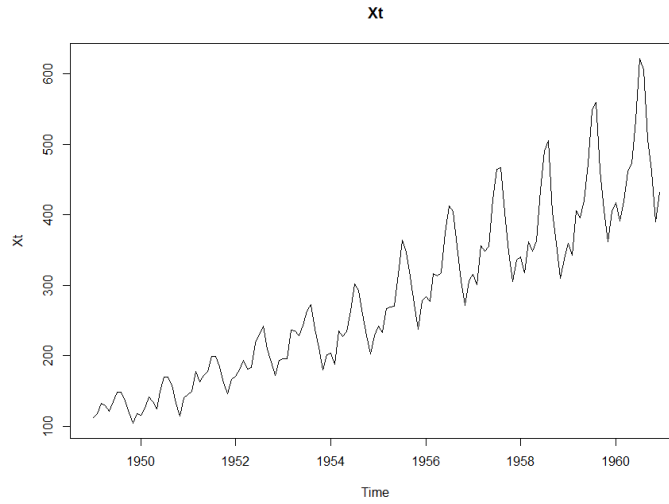


FIGURE 7 – Série AirPassengers

Il nous reste à enlever la tendance (croissance linéaire). Pour ce faire, on différentie une dernière fois pour obtenir  $\{Y_t = \Delta^{13}(\log(X_t))\}$  illustrée à la figure 9.

Cette série est donc plus stationnaire que la série originale. Sa tendance est nulle et sa variance semble stable. Il est possible de tester la stationnarité de la série avec le logiciel R. Voici les critères de sélection pour avoir une idée de l'ordre  $p$  et  $q$  à choisir (tables 4 et 5).

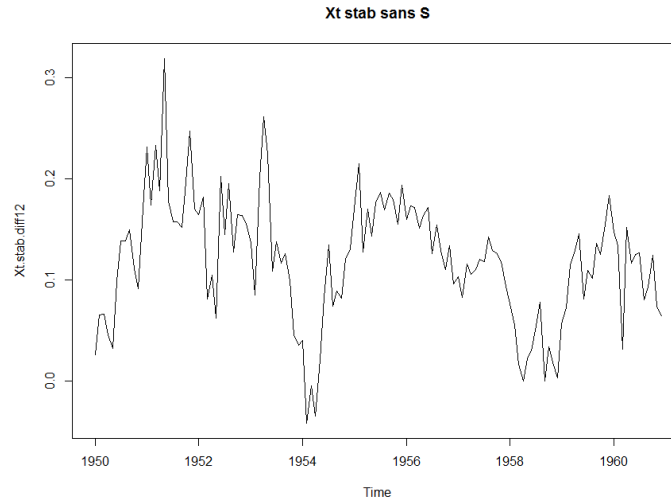
$p \backslash q$	1	2	3	4	5
1	-6,276387	-6,317883	-6,284103	-6,281090	-6,282666
2	-6,326984	-6,321155	-6,417854	-6,412256	-6,334037
3	-6,284579	-6,413744	-6,415536	-6,401048	-6,389769
4	-6,275683	-6,412515	-6,401761	-6,386653	-6,421482
5	-6,303476	-6,290408	-6,440643	<b>-6,484464</b>	-6,347840

TABLE 4 – Critère AIC pour  $\{Y_t = \Delta^{13} \log(X_t)\}$ 

$p \backslash q$	1	2	3	4	5
1	-6,232491	-6,252039	-6,196311	-6,171350	-6,150978
2	-6,261140	-6,233363	<b>-6,308114</b>	-6,280568	-6,180401
3	-6,196787	-6,304003	-6,283848	-6,247411	-6,214185
4	-6,165943	-6,280827	-6,248124	-6,211069	-6,223949
5	-6,171787	-6,136771	-6,265058	-6,286932	-6,128360

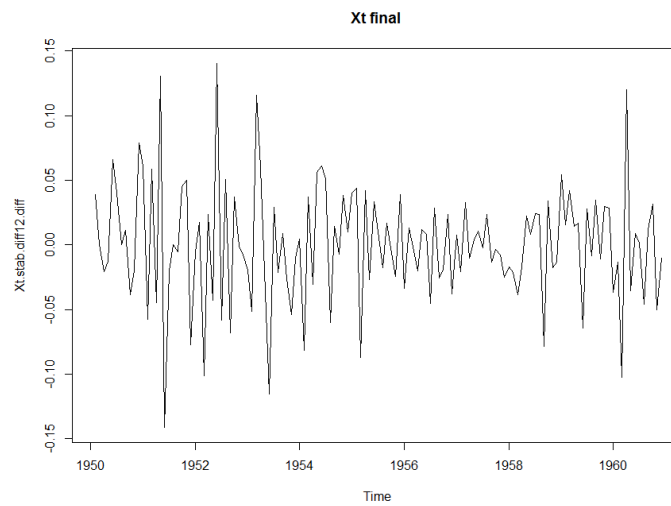
TABLE 5 – Critère BIC pour  $\{Y_t = \Delta^{13} \log(X_t)\}$ 

On remarque que l'AIC semble choisir un modèle ARMA(5,4), car ces ordres minimisent l'AIC. Cependant, en ajustant un modèle ARMA(5,4), on aura à estimer dix paramètres en tout, ce qui semble beaucoup. Il faut se rappeler que

FIGURE 8 – Série  $\{Y_t = \Delta^{12} \log(X_t)\}$ 

l'idée du modèle ARMA était entre autres, de réduire le nombre de paramètres à estimer. De plus, nous savons que l'AIC a tendance à choisir un ordre plus grand que l'ordre réel. On utilise donc le critère BIC. Celui-ci propose de choisir un modèle ARMA(2,3), ce qui est mieux. On va donc ajuster un modèle ARMA(2,3) aux données. Nous obtenons les paramètres estimés suivants :

$$\begin{array}{lll} \hat{\phi}_1 = 0,2488 & \hat{\phi}_2 = -0,8339 & \hat{\theta}_1 = -0,5904 \\ \hat{\theta}_2 = 1,0364 & \hat{\theta}_3 = -0,5205 & \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0,001512 \end{array}$$

FIGURE 9 – Série finale  $\{Y_t = \Delta^{13} \log(X_t)\}$

$$X_t - 0,2488X_{t-1} + 0,8339X_{t-2} = \varepsilon_t + 0,5904\varepsilon_{t-1} - 1,0364\varepsilon_{t-2} + 0,5205\varepsilon_{t-3},$$

où

$$\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0; 0,001512).$$

La dernière étape consiste à vérifier si les termes d'erreur se comportent vraiment comme un bruit blanc. Il faudrait donc vérifier l'espérance et l'autocorrélation de ces erreurs. Pour ce faire, certaines procédures sont déjà fournies dans le logiciel R. Le test de Ljung-Box peut être utilisé pour vérifier l'autocorrélation. En utilisant ces procédures, on trouve que les erreurs issues de notre série possède bien les caractéristiques d'un bruit blanc. Notre modèle peut donc être un bon choix pour faire des prédictions.

## Références

- [BD09] Peter J. BROCKWELL et Richard A. DAVIS : *Time Series : Theory and Methods*. Springer, 2009.
- [BDR92] H. BOUDJELLABA, J-M. DUFOUR et R. ROY : Testing causality between two vectors in multivariate autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, 0:1088–1090, 1992.
- [BJ70] G. BOX et G. JENKINS : *Time series analysis : Forecasting and Daviscontrol*. Holden Day, 1970.
- [Fis12] R. A. FISHER : On an absolute criterion for fitting frequency curves. *Gonville and Caius College*, 1912.
- [Gra69] C. W. J. GRANGER : Investigating causal relations by econometric models and cross- spectral methods. *Econometrica*, 37:424–459, 1969.
- [Sch06] A. SCHUSTER : *On the Periodicity of Sun-spots*. Royal Society of London, 1906.
- [Slu27] E. SLUTZKY : The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5:105–146, 1927.
- [Wol38] H. WOLD : *A study in the Analysis of Stationary Time Series*. Almqvist and Wiksell, 1938.
- [Yul27] U. YULE : On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 226, 1927.

STEVEN FORTIER

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: [Steven.Fortier@USherbrooke.ca](mailto:Steven.Fortier@USherbrooke.ca)

# Application du pentagramme et coefficients amassés

Guillaume Douville

**RÉSUMÉ** L'application du pentagramme envoie un polygone vers le polygone intérieur construit à partir de l'intersection des diagonales les « plus courtes ». Cette application a des liens avec les coefficients amassés.

## 1 Introduction

L'application du pentagramme, introduite par R. Schwartz en 1992 [Sch92], a connu un regain d'intérêt ces dernières années, car elle permet d'exhiber des liens avec les algèbres amassées voir [Gli11, MGOT12]. De plus, certains domaines de l'analyse, par exemple les systèmes intégrables, voir [Sol], [ST11] et [OST10], sont aussi en lien avec cette application.

Selon la définition initiale donnée par Schwartz, l'application du pentagramme, notée  $T$ , envoie le  $i^{\text{e}}$  sommet (en prenant une notation des sommets modulo  $n$ ) d'un  $n$ -gone vers le sommet du  $n$ -gone formé par l'intersection des diagonales  $(i - 1, i + 1)$  et  $(i, i + 2)$ , formant ainsi un pentagramme (voir la figure 1). Dès ce premier article, les auteurs s'intéressent à une généralisation, les  $n$ -gones gauches<sup>1</sup>. Les  $n$ -gones gauches sont des « polygones » infinis plongés dans  $\mathbb{R}P^2$  et  $n$ -périodiques modulo projection.

Il sera introduit, suivant les travaux de [OST10], deux systèmes de coordonnées sur l'espace des  $n$ -gones gauches modulo équivalence projective : le premier est défini selon le birapport, un invariant simple de géométrie projective, alors que le second est défini par un relèvement vers des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui n'a pas d'interprétation géométrique, mais qui s'avère utile aux preuves contenues dans cet article. De plus, il sera introduit, suivant les travaux de M. Glick [Gli11], un système de coordonnées partiel qui suit les mutations de coefficients d'une algèbre amassée particulière telle que définie par [FZ07] sous l'application du pentagramme.

Cet article est organisé comme suit : la première section est consacrée à rappeler des définitions élémentaires de géométrie projective et de coefficients amassés. À la deuxième section, nous définissons formellement les  $n$ -gones gauches, les différents systèmes de coordonnées ainsi que l'application du pentagramme, et

---

J'aimerais remercier les professeurs Vasilisa Shramchenko et Ibrahim Assem pour leur aide à l'écriture de cet article et pour le financement de mon troisième stage de recherche.

<sup>1</sup>de l'anglais *twisted  $n$ -gons*

nous prouvons le résultat principal de cet article : il existe une formule explicite pour les coordonnées de  $T(P)$ . Finalement, à la troisième section, nous introduisons les paramètres qui varient selon les règles de mutations de coefficients d'un carquois particulier.

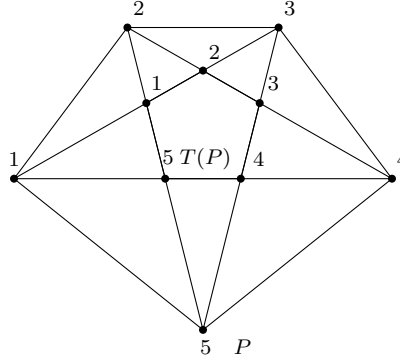


FIGURE 1 – Application du pentagramme  $T$  appliquée au pentagone fermé  $P$

## 2 Rappels

Cette section vise à rappeler des notions de base de géométrie projective, de mutations de carquois et de coefficients amassés associés. Elle permet aussi de fixer les notations utilisées tout au long de cet article.

### 2.1 Géométrie projective

Cet article étudie les  $n$ -gones gauches, qui sont plongés dans  $\mathbb{R}P^2$ , le plan projectif réel exprimé comme quotient de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, l'application du pentagramme sera définie sur le  $n$ -gone gauche et son dual. Il est donc nécessaire de rappeler ces concepts.

**Définition 2.1.** Un *plan projectif*  $E$  est un triplet  $E = (P, L, I)$  composé de deux ensembles  $P$  et  $L$  et d'une relation  $I$  entre  $P$  et  $L$  telle que les axiomes suivants sont respectés :

1. Pour tous  $p_1, p_2 \in P$  distincts, il existe une seule  $l \in L$  telle que  $(p_1, l) \in I$  et  $(p_2, l) \in I$  ;
2. Pour toutes  $l_1, l_2 \in L$  distinctes, il existe un seul  $p \in P$  tel que  $(p, l_1) \in I$  et  $(p, l_2) \in I$  ;
3. Il existe  $p_1, p_2, p_3, p_4$  distincts tels que toute  $l \in L$  est en relation avec au plus deux  $p_i$ .

Les éléments de  $P$  sont appelés *points*, ceux de  $L$  sont appelés *droites* et  $I$  est appelée *relation d'incidence*. Si  $(p, l) \in I$ , le point  $p$  est *incident* à la droite  $l$ .

Les axiomes un et deux assurent qu'entre deux points distincts, il passe toujours une unique droite et que deux droites se coupent toujours en un unique point. Ce deuxième axiome est notable puisqu'il implique qu'il n'existe pas de droites parallèles en géométrie projective. Le troisième axiome ne sert qu'à éliminer des cas triviaux et dégénérés.

À un plan projectif  $E = (P, L, I)$  est associé son *plan projectif dual*  $E^* = (L, P, I^*)$ , où  $(l, p) \in I^*$  si et seulement si  $(p, l) \in I$ . Il est parfois plus simple de considérer le dual de  $E$  afin de définir des applications ou de prouver certains énoncés.

On s'intéresse maintenant au plan réel projectif. Le plan réel projectif est l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine, défini formellement ainsi :

**Définition 2.2.** Le *plan réel projectif*, noté  $\mathbb{R}P^2$ , est obtenu de  $\mathbb{R}_*^3$  en prenant le quotient de celui-ci par la relation d'équivalence

$$x \sim y \iff (\exists k \in \mathbb{R}_*) \text{ tel que } x = ky,$$

c'est-à-dire que  $\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}_*^3) / \sim$ .

Notons  $(x:y:z)$  les classes d'équivalence de  $\mathbb{R}P^2$ , ou encore la droite passant par les points  $(x, y, z)$  et  $(0, 0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Notons aussi  $(i, j)$  la droite passant par les points  $i$  et  $j$ .

Le plan réel projectif est un exemple de plan projectif. Les axiomes présentés à la définition 2.1 sont obtenus en considérant que des droites parallèles de  $\mathbb{R}^2$  se coupent à l'infini.

Dans la définition du  $n$ -gone gauche, nous aurons besoin d'une matrice de monodromie  $M$  introduisant une périodicité. La matrice  $M$  sera un élément de  $PGL(3, \mathbb{R})$ , qui est un quotient du groupe général linéaire. Rappelons premièrement que le groupe général linéaire  $GL(3, \mathbb{R})$  est le groupe des matrices  $3 \times 3$  inversibles à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , muni de la multiplication matricielle.

**Définition 2.3.** Le groupe *projectif linéaire*, noté  $PGL(3, \mathbb{R})$ , est obtenu de  $GL(3, \mathbb{R})$  en prenant le quotient de celui-ci par la relation d'équivalence

$$A \sim B \iff (\exists k \in \mathbb{R}_*) \text{ tel que } A = kB,$$

c'est-à-dire que  $PGL(3, \mathbb{R}) = GL(3, \mathbb{R}) / \sim$ .

Nous présentons maintenant le birapport de points réels dans  $\mathbb{R}$  et de droites réelles dans  $\mathbb{R}^2$ , ce qui mènera à la définition d'un invariant par rapport à  $M \in PGL(3, \mathbb{R})$  et par rapport à la multiplication scalaire pour  $\mathbb{R}P^2$ .

**Définition 2.4.**

1. Soient  $p_1, p_2, p_3, p_4$  des points sur la droite réelle. Alors, le *birapport* de  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , noté  $\chi(p_1, p_2, p_3, p_4)$ , est donné par

$$\chi(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{(p_1 - p_2)(p_3 - p_4)}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}.$$

2. Soient  $v_1, v_2, v_3, v_4$  les vecteurs directeurs de quatre droites dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors, le *birapport* de  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , noté  $\chi(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , est donné par

$$\chi(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{\det(v_1, v_2) \det(v_3, v_4)}{\det(v_1, v_3) \det(v_2, v_4)}.$$

Ces birapports sont invariants par rapport à l'action de  $PGL(3, \mathbb{R})$  et par rapport à la multiplication scalaire. C'est pourquoi, prenant quatre points colinéaires dans  $\mathbb{R}P^2$ , nous pouvons choisir des représentants colinéaires dans  $\mathbb{R}^3$ , puis projeter la droite support de ces points sur  $\mathbb{R}$  pour y calculer le birapport. Cette opération ne dépend pas du représentant choisi dans  $\mathbb{R}^3$  ni de la projection utilisée. De la même façon, ayant quatre droites de vecteurs directeurs  $v_1, v_2, v_3, v_4$  dans  $\mathbb{R}P^2$  et choisissant des représentants coplanaires dans  $\mathbb{R}^3$ , le résultat suivant est obtenu en écrivant  $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$  et  $v_4 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ .

**Lemme 2.5.** *Le birapport  $\chi(v_1, v_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}$ .*  $\square$

Finalement, voici quelques rappels de propriétés des vecteurs que nous utiliserons plus loin.

**Proposition 2.6.** *Soit  $V_1, V_2, V_3$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Alors,*

1.  $(V_1 \times V_2) \times (V_2 \times V_3) = \det(V_1, V_2, V_3) V_2$ ;
2.  $(V_1 \times V_2) \cdot V_3 = \det(V_1, V_2, V_3)$ .  $\square$

## 2.2 Carquois, mutation de coefficients

Les algèbres amassées sont souvent étudiées sans coefficients, en s'intéressant uniquement à la combinatoire des variables dites amassées. En général, une algèbre amassée est une algèbre commutative générée par des ensembles (non disjoints) de variables et de coefficients dits amassés. Nous commençons avec un carquois sans boucles ni 2-cycles ayant  $n$  sommets, que l'on note  $Q$ , et des amas initiaux de variables et de coefficients. On génère, par la suite, de nouveaux carquois, de nouvelles variables et de nouveaux coefficients de façon récursive par un procédé appelé la mutation. Dans cet article, nous ne donnons que les définitions qui sont utiles à l'étude de l'application du pentagramme. En particulier, nous ne nous intéressons qu'à la combinatoire des coefficients, que l'on nomme patron  $Y$ <sup>2</sup>. Pour une couverture plus complète des algèbres amassées, voir les articles [FZ02], [FZ03] et, en particulier pour les mutations de coefficients, [FZ07].

On commence par définir les carquois. Un *carquois* est un quadruplet  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$  composé de deux ensembles  $Q_0$  et  $Q_1$  et de deux fonctions  $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$ . Les éléments de  $Q_0$  sont appelés les *sommets* et ceux de  $Q_1$ , les *flèches*. Pour  $\alpha \in Q_1$ ,  $s(\alpha)$  est appelée la *source* de  $\alpha$ , et  $b(\alpha)$  son *but*. Partant d'un carquois sans boucles ni cycles de longueur 2, notons  $q_{kj}$  le nombre de flèches allant de  $k$  à  $j$  (on convient que  $q_{kj} = -q_{jk}$  si les flèches vont plutôt de  $j$  vers  $k$ ).

---

<sup>2</sup>de l'anglais *Y-pattern*

**Définition 2.7.** Soit  $Q$  un carquois fini sans boucles ni 2-cycles et  $k \in Q_0$ . La *mutation* en  $k$  transforme  $Q$  en un nouveau carquois  $\mu_k Q$  ayant les mêmes sommets et :

1. Pour tout chemin  $i \leftarrow k \leftarrow j$  ayant  $k$  comme centre, ajouter une nouvelle flèche  $i \leftarrow j$  dans  $\mu_k Q$ ;
2. Toute flèche ayant  $k$  comme source ou but est inversée;
3. Les 2-cycles créés sont retirés.

Il est clair que si  $k$  est une source ou un puits,  $\mu_k Q$  est obtenu de  $Q$  en inversant simplement toutes les flèches incidentes à  $k$ . Observons que la mutation est une involution.

Muni de la mutation de carquois, il reste à définir les coefficients associés aux sommets du carquois et leurs mutations. Tel que mentionné précédemment, nous oublions la dynamique des variables amassées puisque celles-ci ne sont pas utiles aux fins de cet article. Une *graine de coefficients*, ou  $y$ -graine, est une paire  $(y, Q)$ , où  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  est un  $n$ -uplet de quantités appelées *coefficients* et  $Q$  est un carquois sans boucles ni 2-cycles ayant  $n$  sommets.

Soit  $(y, Q)$  une graine de coefficients, on définit la mutation  $\mu_k(y, Q)$  de la façon suivante :

$$\mu_k(y, Q) = (y', Q'),$$

où  $Q' = \mu_k Q$  tel que décrit à la définition 2.7 et  $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ , avec

$$y'_j = \begin{cases} y_j^{-1} & \text{si } j = k \\ y_j y_k^{\max(q_{kj}, 0)} (1 + y_k)^{-q_{kj}} & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

### 3 Polygones gauches et application du pentagramme

Nous en arrivons à l'application du pentagramme. Cette section suit les travaux de V. Ovsienko, R. Schwartz et S. Tabachnikov dans [OST10]. Premièrement, tel que mentionné en introduction, l'application du pentagramme est définie sur des polygones généralisés, les  $n$ -gones gauches.

**Définition 3.1.** Soit  $M \in PGL(3, \mathbb{R})$ . Un  $n$ -gone gauche est une application  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}P^2$  qui est périodique à projection près, c'est-à-dire que  $\phi(k + n) = M\phi(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . La matrice  $M$  est dite *matrice de monodromie*.

Notons les images de la fonction, appelés *sommets du polygone gauche*, par  $\phi v_i$ , c'est-à-dire que  $v_i = \phi(i)$ . Le polygone gauche est donc représenté par  $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Nous pouvons le visualiser dans  $\mathbb{R}P^2$  en reliant  $v_i$  à  $v_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

Pour définir correctement l'application du pentagramme, il faut ajouter la condition que pour tout triplet de points consécutifs, ces points ne sont pas



colinéaires. Remarquons que l'on retrouve un polygone fermé, tel que défini en introduction, lorsque  $M = I_3$ . Deux  $n$ -gones gauches  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont équivalents s'il existe une projection  $\Psi \in PGL(3, \mathbb{R})$  telle que  $\Psi\phi_1 = \phi_2$ . Dans ce cas, on a que  $\phi_2(k+n) = \Psi\phi_1(k+n) = \Psi M_1 \phi_1(k) = \Psi M_1 \Psi^{-1} \phi_2(k)$ , donc la matrice de monodromie de  $\phi_2$  est  $\Psi M_1 \Psi^{-1}$ . Notons  $\mathcal{P}_n$  l'espace des  $n$ -gones gauches modulo équivalence projective.

À une courbe différentiable  $\gamma(t)$  dans  $\mathbb{R}P^2$ , il est possible d'associer la courbe duale composée de la famille de ses droites tangentes. Dans le cas discret, nous souhaitons définir de façon similaire les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ , que ce soit de  $\mathbb{R}P^2$  vers  $(\mathbb{R}P^2)^*$  ou inversement.

**Définition 3.2.** Soit  $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  un pentagramme gauche dans  $\mathbb{R}P^2$ . Définissons les deux pentagrammes duaux  $(\alpha(v_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $(\beta(v_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $(\mathbb{R}P^2)^*$  comme suit :

1.  $\alpha : (v_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{R}P^2)^* : v_i \mapsto (v_i, v_{i+1})$  ;
2.  $\beta : (v_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{R}P^2)^* : v_i \mapsto (v_{i-1}, v_{i+1})$ .

On réfère le lecteur à la figure 2 pour une illustration de ces applications.

*Remarque 3.3.* En vertu de la définition du plan dual donné à la section 2.1, les images de  $\alpha$  et  $\beta$  sont des points dans  $(\mathbb{R}P^2)^*$  qui forment un pentagramme. Nous pouvons donc appliquer de nouveau  $\alpha$  et  $\beta$  dans cet espace. Plus formellement, soit  $(l_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  un pentagramme gauche dans  $(\mathbb{R}P^2)^*$ . Nous définissons naturellement les applications suivantes :

1.  $\alpha^* : (l_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}P^2 : v_i \mapsto (l_i, l_{i+1})$  ;
2.  $\beta^* : (l_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}P^2 : v_i \mapsto (l_{i-1}, l_{i+1})$ ,

et associons l'application  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) à  $\alpha^*$  (respectivement  $\beta^*$ ) de sorte que l'on puisse composer celles-ci dans  $\mathbb{R}P^2$ . Par exemple,  $\alpha^2 = \alpha^* \circ \alpha$ .

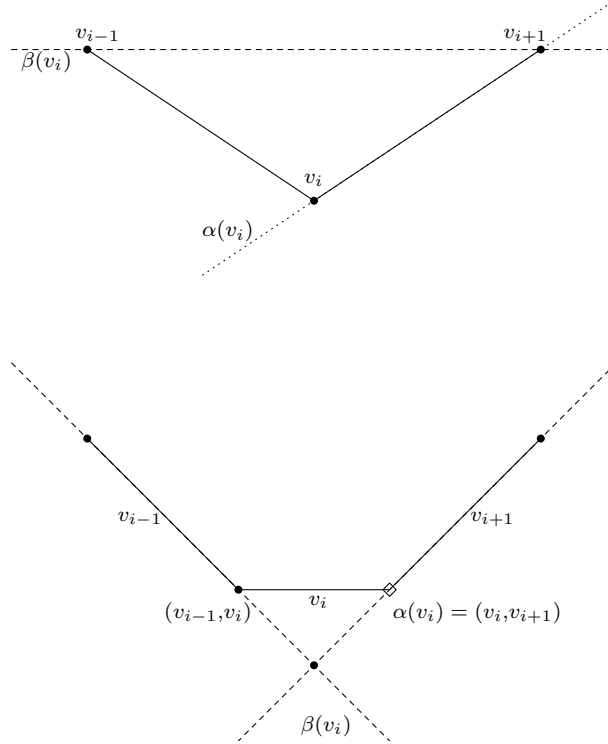
Remarquons que les applications  $\alpha$  et  $\beta$  commutent avec l'action des matrices de  $PGL(3, \mathbb{R})$ . Ces fonctions sont donc correctement définies sur l'espace  $\mathcal{P}_n$ . Il est maintenant possible de définir formellement l'application du pentagramme.

**Définition 3.4.** Soit  $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  un pentagramme gauche, l'*application du pentagramme*, notée  $T$ , est la composition des applications  $\beta$  et  $\alpha$ , c'est-à-dire que  $T = \alpha \circ \beta$ .

L'un des objectifs de cet article est de trouver les coordonnées de  $T(v_i)$  pour chaque sommet  $v_i$ . Pour ce faire, il faut connaître plus précisément l'action des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Lemme 3.5.** Soit  $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  un pentagramme gauche. Nous obtenons :

$$\alpha^2(v_i) = v_{i+1} \quad \beta^2(v_i) = v_i \quad T(v_i) = \alpha \circ \beta(v_i) = (v_{i-1}, v_{i+1}) \cap (v_i, v_{i+2}).$$

FIGURE 2 – Applications  $\alpha$  et  $\beta$ , en haut dans  $\mathbb{R}P^2$ , en bas dans  $(\mathbb{R}P^2)^\star$ 

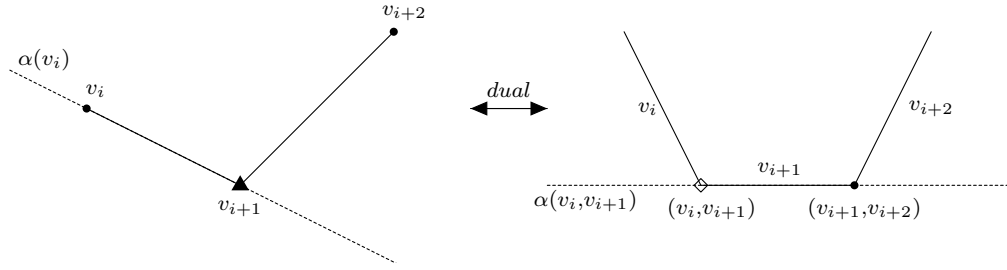
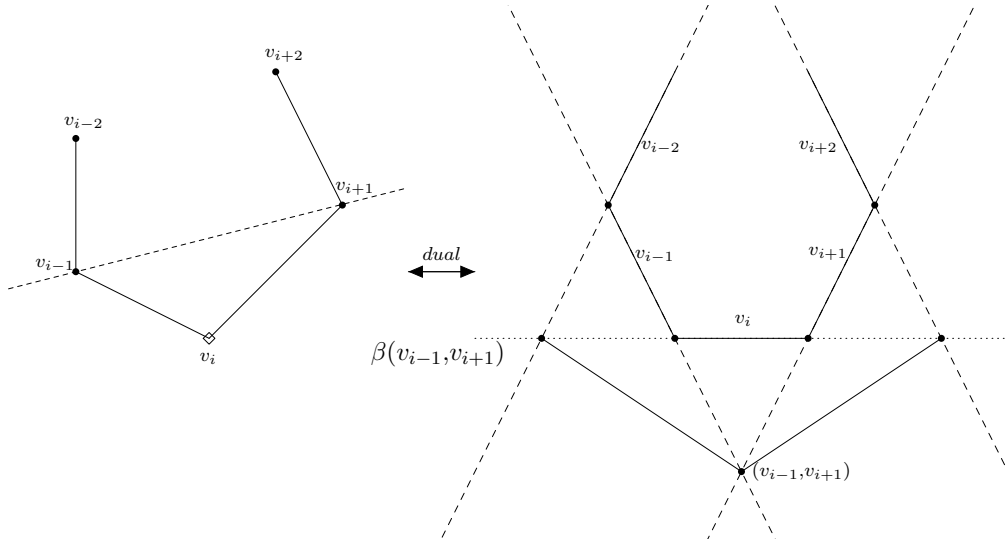
*Démonstration.* L'énoncé suit directement, il suffit de calculer correctement les compositions dans  $\mathbb{R}P^2$  et  $(\mathbb{R}P^2)^\star$ , ce qui est fait visuellement aux figures 3 à 5. Par exemple,

$$\begin{aligned}
 \alpha^2(v_i) &= (\alpha^\star \circ \alpha)(v_i) \\
 &= \alpha^\star((v_i, v_{i+1})) \\
 &= (v_i, v_{i+1}) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}) \\
 &= v_{i+1}.
 \end{aligned}$$

Les autres compositions sont similaires. □

On définit maintenant des coordonnées pour les polygones gauches. Les coordonnées doivent être correctement définies dans  $\mathbb{R}P^2$  (elles doivent rester inchangées par des projections), c'est pourquoi elles impliquent le birapport présenté à la définition 2.4. Ces coordonnées requièrent un peu plus que trois points consécutifs non colinéaires pour obtenir un birapport valide, en conséquence ce système de coordonnées n'est pas défini entièrement sur  $\mathcal{P}_n$ . Il est cependant généralement défini, ce qui est suffisant pour les besoins de cet article.

**Définition 3.6.** À tout sommet  $v_i$  est associé le couple  $(x_i, y_i)$  défini de la façon suivante (voir la figure 6) :

FIGURE 3 – Composition  $\alpha^2(v_i) = \alpha(v_i, v_{i+1}) = v_{i+1}$ FIGURE 4 – Composition  $\beta^2(v_i) = \beta(v_{i-1}, v_{i+1}) = v_i$ 

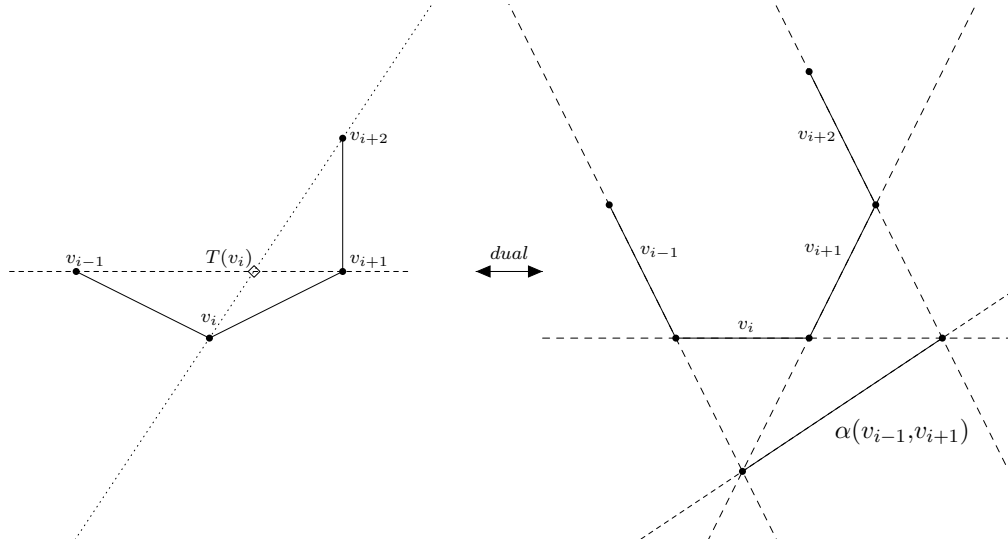
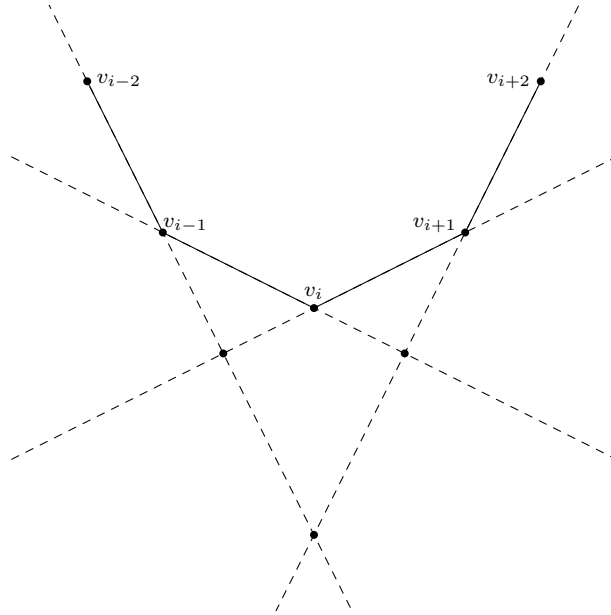
1.  $x_i = \chi(v_{i-2}, v_{i-1}, (v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_i, v_{i+1}), (v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}))$ ;
2.  $y_i = \chi((v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}), (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}), v_{i+1}, v_{i+2})$ .

Ces coordonnées ne définissent pas un unique  $n$ -gone gauche dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est cependant possible de passer de  $\mathbb{R}^3$  à  $\mathbb{RP}^2$  et vice-versa, en obtenant des polygones équivalents à projection près. Pour les détails sur la façon de passer d'un espace à l'autre, voir [Sch08].

On cherche à exprimer  $T(v_i)$  en termes de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$ . Pour ce faire, il est nécessaire de définir de nouvelles coordonnées qui rendent les calculs possibles, les coordonnées  $(a, b)$ . À partir de cet instant, posons que  $n$  n'est pas multiple de 3, pour des raisons techniques qui seront mentionnées plus tard.

**Définition 3.7.** Considérons les suites  $n$ -périodiques  $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ , où  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  et  $a_{i+n} = a_i$ ,  $b_{i+n} = b_i$ . On leur associe une suite de vecteurs  $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , où  $V_i \in \mathbb{R}^3$ , de la façon suivante :

$$V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z},$$

FIGURE 5 – Composition  $\alpha \circ \beta(v_i) = \alpha(v_{i-1}, v_{i+1}) = T(v_i)$ FIGURE 6 – Points utilisés pour la définition des coordonnées  $(x, y)$ 

avec  $V_0 = (1, 0, 0)^t$ ,  $V_1 = (0, 1, 0)^t$  et  $V_2 = (0, 0, 1)^t$ .

*Remarque 3.8.* La  $n$ -périodicité implique qu'il existe une matrice  $\tilde{M} \in SL(3, \mathbb{R})$ , que l'on appelle aussi par simplicité la matrice de monodromie, telle que  $V_{i+n} = \tilde{M}V_i$ . En effet, on vérifie par récurrence que la matrice  $\tilde{M} = [V_n, V_{n+1}, V_{n+2}]$  satisfait cette condition. Comme  $SL(3, \mathbb{R}) \cong PGL(3, \mathbb{R})$ , il existe une unique  $M \in PGL(3, \mathbb{R})$  correspondant à  $\tilde{M}$ .

Ayant la suite de  $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  telle que définie ci-haut, il est évident, en vertu de la remarque précédente, que la projection vers  $\mathbb{RP}^2$   $V_i \mapsto v_i = [V_i]$  définit un  $n$ -gone gauche avec la matrice de monodromie  $M$ . Les  $v_i$  sont en position générale, car  $\det(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}) = 1$ .

**Proposition 3.9.** *Si  $n$  n'est pas multiple de 3, alors  $P_n$  est en bijection avec l'espace des suites  $n$ -périodiques  $(a_i, b_i)$ .*

*Démonstration.* Soit  $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  un polygone gauche. Alors, les  $v_i \in \mathbb{RP}^2$  sont en position générale et respectent  $v_{i+n} = Mv_i$ , avec  $M \in PGL(3, \mathbb{R})$ . Comme  $PGL(3, \mathbb{R}) \cong SL(3, \mathbb{R})$ , il existe un unique  $\tilde{M} \in SL(3, \mathbb{R})$  correspondant à  $M$ . Considérons un relèvement  $v_i \mapsto \tilde{V}_i \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\tilde{V}_{i+n} = \tilde{M}\tilde{V}_i$ . Le fait que les  $v_i$  soient en position générale implique que les vecteurs  $\tilde{V}_i, \tilde{V}_{i+1}$  et  $\tilde{V}_{i+2}$  sont linéairement indépendants. Ainsi, on a que

$$\tilde{V}_{i+3} = a_i \tilde{V}_{i+2} + b_i \tilde{V}_{i+1} + c_i \tilde{V}_i,$$

où  $(a_i), (b_i)$  et  $(c_i)$  sont des suites  $n$ -périodiques indexées par  $\mathbb{Z}$ . Appliquons une homothétie  $V_i = t_i \tilde{V}_i$  telle que  $c_i \equiv 1$ . On obtient le système d'équations suivant (les indices sont pris modulo  $n$ ) :

$$t_i t_{i+1} t_{i+2} = \frac{1}{\det(\tilde{V}_i, \tilde{V}_{i+1}, \tilde{V}_{i+2})}.$$

Ce système a une solution unique, car  $n$  n'est pas un multiple de 3.  $\square$

On appelle maintenant le relèvement de  $(v_i)$  vers la suite  $(V_i) \in \mathbb{R}^3$  respectant  $V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i$  et  $V_{i+n} = \tilde{M} V_i$  le relèvement *canonique*. Nous avons ainsi associé un  $n$ -gone gauche à des suites de nombres  $(a_i, b_i)$ . Calculons maintenant le lien entre les deux systèmes de coordonnées.

**Lemme 3.10.** *Si un  $n$ -gone gauche est donné par les suites  $n$ -périodiques  $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ , les coordonnées sont en relation :*

$$x_i = \frac{a_{i-2}}{b_{i-2} b_{i-1}} \text{ et } y_i = \frac{b_{i-1}}{a_{i-2} a_{i-1}}.$$

*Démonstration.* En vertu de la définition, on a que

$$x_{i+1} = \chi(v_{i-1}, v_i, (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}), (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+2}, v_{i+3})).$$

Pour obtenir le résultat, il suffit de calculer le relèvement canonique des points  $v_{i-1}, v_i, (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+1}, v_{i+2})$  et  $(v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+2}, v_{i+3})$ . Rappelons que, pour  $a, b, c, d$  éléments de  $\mathbb{RP}^2$ , le relèvement de  $(a, b) \cap (c, d)$  est  $(A \times B) \times (C \times D)$ . Tel que discuté à la section 2, appliquer le birapport avant ou après le relèvement donne le même résultat. Alors, en utilisant les relations de récurrence  $V_{i+3} =$

$a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i$  et  $V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1} V_{i+1} - b_{i-1} V_i$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_{i+2} - a_{i-1} V_{i+1} - b_{i-1} V_i) \times V_i \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_{i+2} \times V_i - a_{i-1} V_{i+1} \times V_i - b_{i-1} V_i \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_{i+2} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) - a_{i-1} (V_{i+1} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_i \times V_{i+2}) \times (V_{i+2} \times V_{i+1}) + a_{i-1} (V_i \times V_{i+1}) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= \det(V_i, V_{i+2}, V_{i+1}) V_{i+2} + a_{i-1} \det(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}) V_{i+1} \\
&= -V_{i+2} + a_{i-1} V_{i+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+3}) \\
&= ((V_{i+2} - a_{i-1} V_{i+1} - b_{i-1} V_i) \times V_i) \times (V_{i+2} \times (a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i)) \\
&= (V_{i+2} \times V_i - a_{i-1} V_{i+1} \times V_i) \times (b_i V_{i+2} \times V_{i+1} + V_{i+2} \times V_i) \\
&= b_i ((V_{i+2} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+1})) - a_{i-1} b_i ((V_{i+1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+1})) - \\
&\quad a_{i-1} ((V_{i+1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_i)) \\
&= b_i V_{i+2} - a_{i-1} b_i V_{i+1} - a_{i-1} V_i.
\end{aligned}$$

Finalement, on a que

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= \chi(V_{i-1}, V_i, (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}), (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+3})) \\
&= \chi(V_{i-1}, V_i, -V_{i+2} + a_{i-1} V_{i+1}, b_i V_{i+2} - a_{i-1} b_i V_{i+1} - a_{i-1} V_i).
\end{aligned}$$

On applique le lemme 2.5, en utilisant que

$$-V_{i+2} + a_{i-1} V_{i+1} = -V_{i-1} - b_{i+1} V_i$$

et que

$$b_i V_{i+2} - a_{i-1} b_i V_{i+1} - a_{i-1} V_i = b_i V_{i-1} + (b_i b_{i+1} - a_{i+1}) V_i$$

pour obtenir le résultat. Le résultat pour  $y_i$  est obtenu de la même façon.  $\square$

Muni de cette équivalence, il ne reste qu'à calculer l'effet des applications  $\alpha$  et  $\beta$  en termes de coordonnées  $(a, b)$ , c'est-à-dire prolonger ces fonctions aux système de coordonnées  $(a, b)$ .

**Lemme 3.11.** *Soit un  $n$ -gone gauche correspondant à la suite  $n$ -périodique  $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ . Pour tout  $i$ , les applications donnent :*

1.  $\alpha(a_i, b_i) = (-b_{i+1}, -a_i)$  ;
2.  $\beta(a_i, b_i) = \left( -\frac{\lambda_i b_{i-1}}{\lambda_i + 2}, -\frac{\lambda_{i+3} a_{i+1}}{\lambda_{i+1}} \right)$ , où les  $\lambda_i$  sont uniquement définis par l'égalité  $\lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} = \frac{-1}{1 + b_{i-1} a_i}$ .

*Démonstration.* Nous utilisons de nouveau le relèvement canonique de  $(\alpha(v_i))$  vers  $\mathbb{R}^3$ . Posons  $U_i = V_i \times V_{i+1}$ . Ce relèvement est le relèvement canonique, puisque

$$\begin{aligned}\det(U_i, U_{i+1}, U_{i+2}) &= (U_i \times U_{i+1}) \cdot U_{i+2} \\ &= ((V_i \times V_{i+1}) \times (V_{i+1} \times V_{i+2})) \cdot (V_{i+2} \times V_{i+3}) \\ &= V_{i+1} \cdot (V_{i+2} \times V_{i+3}) = 1.\end{aligned}$$

Nous obtenons une suite  $U_{i+3} = \alpha^*(a_i)U_{i+2} + \alpha(b_i)U_{i+1} + U_i$  et voulons calculer les valeurs de  $\alpha(a_i)$  et de  $\alpha(b_i)$ . Puisque  $\det(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}) = 1$  et  $\det(V_i, V_{i+1}, V_i) = 0$ , il vient que

$$U_{i+1} \cdot V_i = U_i \cdot V_i + 2 = 1 \text{ et } U_i \cdot V_i = U_i \cdot V_{i+1} = 0.$$

Nous calculons aussi la valeur de  $U_{i+2} \cdot V_i$ . En vertu de la définition, on a que

$$V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i.$$

Effectuons le produit vectoriel à gauche avec le vecteur  $V_{i+2}$  et le produit scalaire à droite par le vecteur  $V_i$  pour obtenir

$$U_{i+2} \cdot V_i = -b_i.$$

Nous sommes maintenant prêts à calculer les valeurs de  $\alpha(a_i)$  et de  $\alpha(b_i)$ .

$$\begin{aligned}0 &= U_{i+3} \cdot V_{i+3} \\ &= (\alpha(a_i)U_{i+2} + \alpha(b_i)U_{i+1} + U_i) \cdot (a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i) \\ &= \alpha(a_i)b_i + \alpha(a_i)(-b_i) + \alpha(b_i) + a_i \\ &= \alpha(b_i) + a_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-b_{i+1} &= U_{i+3} \cdot V_{i+1} \\ &= (\alpha(a_i)U_{i+2} + \alpha(b_i)U_{i+1} + U_i) \cdot V_{i+1} \\ &= \alpha(a_i)\end{aligned}$$

Pour les valeurs de  $\beta$ , utilisons le relèvement canonique de  $\beta(v_i)$  vers  $\mathbb{R}^3$ . Posons  $W_i = \lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}$ , où les coefficients sont tels que l'on a  $\det(W_i, W_{i+1}, W_{i+2}) = 1$ . Nous obtenons une suite  $W_{i+3} = \beta(a_i)W_{i+2} + \beta(b_i)W_{i+1} + W_i$  et voulons déterminer les valeurs de  $\beta(a_i)$  et de  $\beta(b_i)$ . Premièrement, on a que

$$\begin{aligned}\beta(a_i)W_{i+2} &= W_{i+3} - \beta(b_i)W_{i+1} - W_i \\ \beta(a_i)\lambda_{i+2}V_{i+1} \times V_{i+3} &= \lambda_{i+3}V_{i+2} \times V_{i+4} - \beta(b_i)\lambda_{i+1}V_i \times V_{i+2} - \lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}.\end{aligned}$$

On effectue le produit scalaire à droite par le vecteur  $V_{i+2}$  pour obtenir

$$-\beta(a_i)\lambda_{i+2} = -\lambda_i(V_{i-1} \times V_{i+1}) \cdot V_{i+2}.$$

Or,  $V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1}V_{i+1} - b_{i-1}V_i$ , d'où nous obtenons

$$\begin{aligned} -\beta(a_i)\lambda_{i+2} &= -\lambda_i((V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1}V_{i+1} - b_{i-1}V_i) \times V_{i+1}) \cdot V_{i+2} \\ -\beta(a_i)\lambda_{i+2} &= \lambda_i b_{i-1} \\ \beta(a_i) &= \frac{-\lambda_i b_{i-1}}{\lambda_{i+2}}. \end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned} \beta(b_i)W_{i+1} &= W_{i+3} - \beta(a_i)W_{i+2} - W_i \\ \beta(b_i)\lambda_{i+1}V_i \times V_{i+2} &= \lambda_{i+3}V_{i+2} \times V_{i+4} - \beta(a_i)\lambda_{i+2}V_{i+1} \times V_{i+3} - \lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}. \end{aligned}$$

On effectue le produit scalaire à droite par le vecteur  $V_{i+1}$  pour obtenir

$$-\beta(b_i)\lambda_{i+1} = \lambda_{i+3}(V_{i+2} \times V_{i+4}) \cdot V_{i+1}.$$

Encore une fois,  $V_{i+4} = a_{i+1}V_{i+3} + b_{i+1}V_{i+2} + V_{i+1}$ , d'où nous obtenons,

$$\begin{aligned} -\beta(b_i)\lambda_{i+1} &= \lambda_{i+3}(V_{i+2} \times (a_{i+1}V_{i+3} + b_{i+1}V_{i+2} + V_{i+1})) \cdot V_{i+1} \\ -\beta(b_i)\lambda_{i+1} &= \lambda_{i+3}a_{i+1}(V_{i+2} \times V_{i+3}) \cdot V_{i+1} \\ \beta(b_i) &= \frac{-\lambda_{i+3}a_{i+1}}{\lambda_{i+1}}. \end{aligned}$$

Finalement, il ne reste qu'à vérifier que  $\lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2} = \frac{-1}{1+b_{i-1}a_i}$ . On a que

$$\begin{aligned} 1 &= \det(W_i, W_{i+1}, W_{i+2}) \\ &= \det(\lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}, \lambda_{i+1} V_i \times V_{i+2}, \lambda_{i+2} V_{i+1} \times V_{i+3}) \\ &= \lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} \det(V_{i-1} \times V_{i+1}, V_i \times V_{i+2}, V_{i+1} \times V_{i+3}). \end{aligned}$$

Or, puisque  $V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1}V_{i+1} - b_{i-1}V_i$  et  $V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i$ , il vient que

$$\begin{aligned} &\det(V_{i+2} \times V_{i+1} - b_{i-1}V_i \times V_{i+1}, V_i \times V_{i+2}, a_i V_{i+1} \times V_{i+2} + V_{i+1} \times V_i) \\ &= ((V_{i+2} \times V_{i+1} - b_{i-1}V_i \times V_{i+1}) \times (V_i \times V_{i+2})) \cdot (a_i V_{i+1} \times V_{i+2} + V_{i+1} \times V_i) \\ &= (V_{i+2} - b_{i-1}V_i) \cdot (a_i V_{i+1} \times V_{i+2} + V_{i+1} \times V_i) \\ &= (V_{i+2} \cdot (V_{i+1} \times V_i) - a_i b_{i-1} V_i \cdot (V_{i+1} \times V_{i+2})) \\ &= -1 - a_i b_{i-1} \end{aligned}$$

et le résultat suit.  $\square$

On en arrive finalement, en combinant les lemmes 3.10 et 3.11 au résultat souhaité :



**Théorème 3.12.** *Soit un  $n$ -gone gauche donné par les suites  $n$ -périodiques  $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  et soit  $T$ , l'application du pentagramme. L'application se calcule sur chaque couple pour donner :*

$$T(x_i, y_i) = \left( x_i \frac{1 - x_{i-1}y_{i-1}}{1 - x_{i+1}y_{i+1}}, y_{i+1} \frac{1 - x_{i+2}y_{i+2}}{1 - x_i y_i} \right).$$

*Démonstration.* Démontrons le résultat seulement pour la première coordonnée, la seconde s'obtenant de la même façon. Notons pour simplifier  $T(x_i)$  ( $T(a_i)$  respectivement) la composition de l'application du pentagramme  $T(x_i, y_i)$  ( $T(a_i, b_i)$  respectivement) avec la projection sur la première coordonnée. Premièrement, des lemmes 3.5 et 3.11 viennent les formules suivantes :

$$T(a_i) = \frac{\lambda_{i+4}a_{i+2}}{\lambda_{i+2}} \quad T(b_i) = \frac{\lambda_i b_{i-1}}{\lambda_{i+2}},$$

où, en vertu du lemme 3.11, on a  $\lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} = \frac{-1}{1+b_{i-1}a_i}$ . De plus, les relations données au lemme 3.10 donnent

$$x_i y_i = \frac{-1}{a_{i-1}b_{i-2}} \quad \frac{a_i}{a_{i-3}} = \frac{x_i y_{i-1}}{x_{i+1} y_{i+1}}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} T(x_i) &= \frac{T(a_{i-2})}{T(b_{i-2})T(b_{i-1})} \\ &= \frac{\lambda_{i+2}a_i}{\lambda_i} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-2}b_{i-3}} \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i-1}b_{i-2}} \\ &= \frac{a_i}{b_{i-3}b_{i-2}} \frac{\lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2}}{\lambda_{i-2} \lambda_{i-1} \lambda_i} \\ &= \frac{a_i}{b_{i-3}b_{i-2}} \frac{1 + b_{i-3}a_{i-2}}{1 + b_{i-1}a_i} \\ &= \frac{a_i}{a_{i-3}} \frac{a_{i-3}}{b_{i-3}b_{i-2}} \frac{1 + b_{i-3}a_{i-2}}{1 + b_{i-1}a_i} \\ &= \frac{x_i y_{i-1}}{x_{i+1} y_{i+1}} \cdot x_{i-1} \left( \frac{1 - \frac{1}{x_{i-1}y_{i-1}}}{1 - \frac{1}{x_{i+1}y_{i+1}}} \right) \\ &= x_i \frac{1 - x_{i-1}y_{i-1}}{1 - x_{i+1}y_{i+1}}. \end{aligned} \quad \square$$

Ayant trouvé les coordonnées  $(x, y)$  d'une itération de l'application du pentagramme, nous désirons un procédé permettant de connaître les coordonnées d'itérations successives de cette application.

## 4 Coefficients amassés

Cette section présente des résultats de Max Glick [Gli11].

FIGURE 7 – Exemple d'application du pentagramme sur  $\phi$ , où  $T(\phi(i)) = v'_{i+\frac{1}{2}}$

**Définition 4.1.** Soit  $\phi$  un  $n$ -gone gauche indexé par  $\mathbb{Z}$ . Alors, les *paramètres*  $z$  de  $\phi$  sont donnés par

$$z_i = \begin{cases} -(x_i y_i)^{-1} & \text{si } i \text{ est pair} \\ -x_i y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, si  $\phi$  est indexé par  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , alors les *paramètres*  $z$  de  $\phi$  sont donnés par

$$z_i = \begin{cases} -(x_i y_i)^{-1} & \text{si } i \text{ est impair} \\ -x_i y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

$z_{2i} = -(\chi((v_i, v_{i-2}), (v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), (v_i, v_{i+2})))^{-1}$  et que

$$z_{2i+1} = -\chi((v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_i, v_{i+1}), v_i, v_{i+1}, (v_{i+2}, v_{i+3}) \cap (v_i, v_{i+1})).$$

On réfère le lecteur à la figure 8 pour une illustration des points et des droites utilisées.

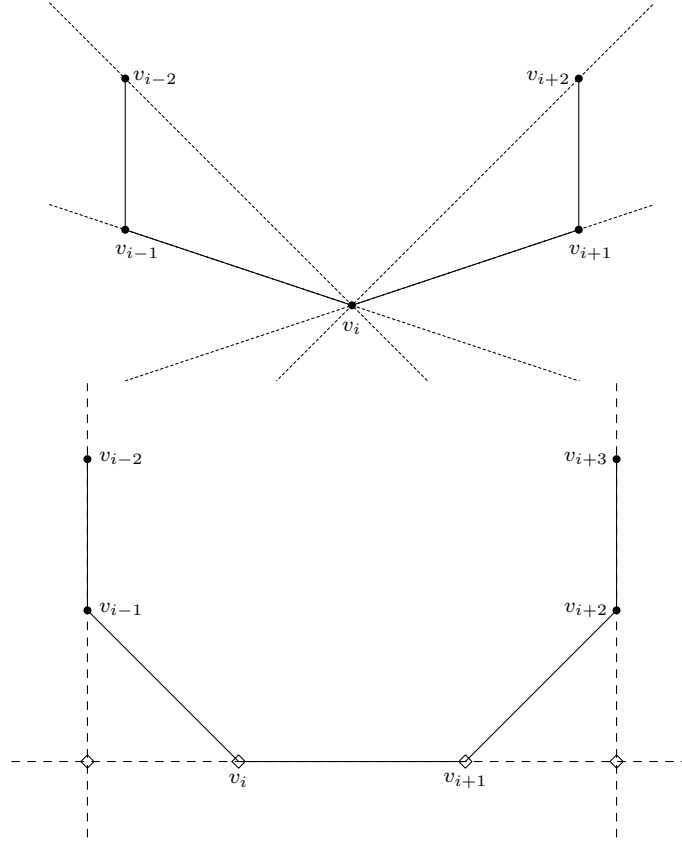


FIGURE 8 – Droites utilisées (en haut) et points utilisés (en bas) pour les birapports des  $z_i$

Le fait que les  $z_i$  soient des birapports a été montré dans [OST10]. La vérification de l'équivalence des deux façons de définir les coordonnées  $z$  est difficile directement, il est plus aisé de passer par les coordonnées  $(a,b)$  vues à la définition 3.7.

Connaissant les paramètres  $z$ , il est impossible de retrouver les coordonnées  $(x,y)$  (en particulier, le produit  $z_1 z_2 \cdots z_{2n}$  égale 1 pour tout  $n$ -gone). C'est pourquoi on dit que les paramètres  $z$  ne forment qu'un système partiel de coordonnées. Puisque l'on souhaite retrouver les coordonnées  $(x,y)$  à partir des paramètres  $z$ , il est nécessaire d'introduire des données supplémentaires.

**Définition 4.3.** [Sch08] Soit  $\phi$  un  $n$ -gone gauche. Les polynômes  $O_n(\phi) = x_1 x_2 \cdots x_n$  et  $E_n(\phi) = y_1 y_2 \cdots y_n$  sont appelés les *invariants du pentagramme*.

**Théorème 4.4.** [Sch08] Soit  $\phi$  un  $n$ -gone gauche. Les invariants du pentagramme sont échangés par l'application du pentagramme :

$$O_n(T(\phi)) = E_n(\phi) \quad E_n(T(\phi)) = O_n(\phi).$$

Les invariants introduits ci-haut ne sont pas les seuls invariants définis initialement par Schwartz. Munis des paramètres  $z$  et des invariants du pentagramme,

il est possible de retrouver les coordonnées  $(x, y)$ . L'application du pentagramme sur les invariants étant simple, il ne reste qu'à étudier l'évolution des paramètres  $z$ . De la formule donnée au théorème 3.12 découle la proposition suivante :

**Proposition 4.5.** *Soit  $(z_1, \dots, z_{2n})$  les paramètres  $z$  du  $n$ -gone gauche  $\phi$ . Si  $\phi$  est indexé par  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , alors le  $i^e$   $z$ -paramètre de  $T(\phi)$  est  $z'_i$ , où*

$$z'_i = \begin{cases} z_{i-3}z_i z_{i+3} \frac{(1+z_{j-1})(1+z_{j+1})}{(1+z_{j-3})(1+z_{j+3})} & \text{si } i \text{ est pair} \\ z_i^{-1} & \text{sinon .} \end{cases}$$

*Si  $\phi$  est plutôt indexé par les entiers, alors  $i^e$   $z$ -paramètre de  $T(\phi)$  est  $z''_i$ , où*

$$z''_i = \begin{cases} z_i^{-1} & \text{si } i \text{ est pair} \\ z_{i-3}z_i z_{i+3} \frac{(1+z_{j-1})(1+z_{j+1})}{(1+z_{j-3})(1+z_{j+3})} & \text{sinon .} \end{cases}$$

□

Il est maintenant possible de calculer les itérations de l'application du pentagramme à l'aide des mutations de coefficients amassés introduits à la sous-section 2.2. Il faut, pour cela, associer un carquois au  $n$ -gone gauche.

**Définition 4.6.** Le carquois associé aux  $n$ -gones  $Q_n$  est un carquois ayant  $2n$  sommets, biparti entre sommets pairs et impairs, tel que pour tout sommet  $i$  impair,  $\{i \rightarrow (i-1), i \rightarrow (i+1), (i-3) \rightarrow i, (i+3) \rightarrow i\} \subseteq (Q_n)_1$  (les sommets sont numérotés modulo  $2n$ ). Un exemple de tel carquois est présenté à la figure 9.

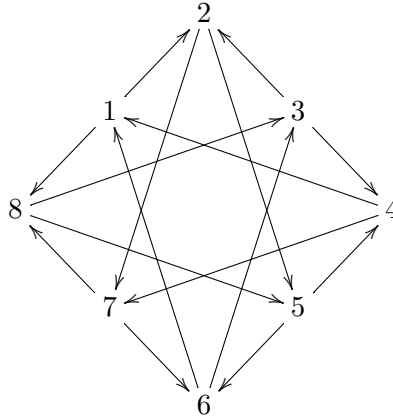


FIGURE 9 – Carquois  $Q_4$

Notons  $\mu_{\text{impair}}$  la composition  $\mu_{2n-1} \circ \dots \circ \mu_3 \mu_1$  et  $\mu_{\text{pair}}$  la composition  $\mu_{2n} \circ \dots \circ \mu_4 \mu_2$ . Suivant les règles de mutation présentées à la définition 2.7, remarquons que  $\mu_{\text{impair}}(Q_n) = \mu_{\text{pair}}(Q_n) = -Q_n$ , où  $-Q_n$  est le carquois  $Q_n$  où les sources et les buts des flèches sont échangés.

On obtient ainsi que les mutations de graines de coefficients  $\mu_{\text{impair}}$  et  $\mu_{\text{pair}}$  correspondent à l'application du pentagramme.

**Théorème 4.7.** *Munis des notations précédentes, on a que :*

$$\mu_{\text{impair}}((z_1, \dots, z_{2n}), -Q_n) = ((z'_1, \dots, z'_{2n}), Q_n) \text{ et}$$

$$\mu_{\text{pair}}((z_1, \dots, z_{2n}), Q_n) = ((z''_1, \dots, z''_{2n}), -Q_n).$$

□

## Références

- [FZ02] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, (15(2)):497–529, 2002.
- [FZ03] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras II : Finite type classification. *Invent. Math.*, (154):63–121, 2003.
- [FZ07] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras IV : Coefficients. *Compos. Math.*, (143):112–164, 2007.
- [Gli11] M. GLICK : The pentagram map and Y-patterns. *Adv. Math.*, (227):1019–1045, 2011.
- [MGOT12] S. MORIER-GENOUD, V. OSIENKO et S. TABACHNIKOV : 2-frieze patterns and the cluster structure of the space of polygons. *Ann. Inst. Fourier*, 2012. in print.
- [OST10] V. OVSIENKO, R. SCHWARTZ et S. TABACHNIKOV : The pentagram map : a discrete iintegrable system. *Commun. Math. Phys.*, (299):409–446, 2010.
- [Sch92] R. SCHWARTZ : The pentagram map. *Experiment. Math.*, (1):71–81, 1992.
- [Sch08] R. SCHWARTZ : Discrete monodromy, pentagrams, and the method of condensation. *J. Fixed Point Theory Appl.*, (3):379–409, 2008.
- [Sol] F. SOLOVIEV : Integrability of the Pentagon Map. Preprint arXiv :1106.3950.
- [ST11] R. SCHWARTZ et S. TABACHNIKOV : The Pentagrams integrals on inscribed polygons. *Electron. J. Comb.*, (18):171, 2011.

GUILLAUME DOUVILLE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Guillaume.Douville@USherbrooke.ca

**CaMUS** est une revue mathématique publiée par le Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke. Le but de ces cahiers est de permettre aux étudiants de présenter leurs travaux effectués dans le cadre d'activités comme les stages de recherche du premier cycle, les présentations au Club Mathématique et les cours d'initiation à la recherche. Les auteurs sont principalement des étudiants du premier cycle, notamment en mathématiques et au Baccalauréat en enseignement au secondaire avec profil en mathématiques. Cette revue est publiée à l'intention de tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques, à l'Université de Sherbrooke et ailleurs. Ses objectifs sont de favoriser :

- l'apprentissage de la rédaction d'articles dès le premier cycle,
- l'amélioration de la communication écrite,
- le développement de la rigueur d'expression,
- la motivation des étudiants pour la recherche en général.

Le comité de rédaction de CaMUS est composé des étudiants :

- Krystelle Chouinard
- Guillaume Douville
- David Racicot-Desloges
- Adam Salvail (rédacteur gérant)

et des professeurs :

- Ibrahim Assem
- Taoufik Bouezmarni
- Virginie Charette (rédactrice en chef)
- Tomasz Kaczynski

**Information aux auteurs :** Les articles doivent constituer des présentations originales mais on ne demande pas qu'ils contiennent des résultats originaux : pour la prépublication de ces derniers, la série de Rapports de recherche du Département de mathématiques est un meilleur médium. Les articles doivent être rédigés en  $\text{\LaTeX}$  et soumis suivant les instructions données à la page Web de CaMUS :

**<http://camus.dmat.usherbrooke.ca>**

**Abonnement, achat d'exemplaires et autres renseignements :** CaMUS est une publication électronique sans frais avec un nombre limité d'exemplaires imprimés à vendre. Pour des informations sur le prix courant, le mode de paiement ou pour nous contacter, rendez-vous à l'adresse Web indiquée ci-dessus.

CaMUS · Département de mathématiques · Faculté des sciences · Université de Sherbrooke · 2500, boulevard de l'Université · Sherbrooke (Québec), Canada J1K 2R1